

tanulmányok

81/1978

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

Ein Beitrag
zur Theorie des Entwurfs doppelt gekrümmter Flächen unter
differentialgeometrischen und rechentechnischen Aspekten

Peter BONITZ /TUD/

Tanulmányok 81/1978

Felelős kiadó:
Dr. Vámos Tibor

ISBN 963 311 068 8
ISSN 0324-2951

7220-8310
SZÁMOK Reprográfia

V O R S P A N N

Infolge langjähriger internationaler Kontakte im Rahmen der Arbeit für die internationale Förderung IFIP mit dem Technischen Komitee TC und den speziellen Arbeitsgruppen 5.2. CAD und 5.3. CAM hat sich eine Arbeitsteilung zwischen der TU Dresden, Sektion Fertigungstechnik und Werkzeugmaschinen und der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Institut für Rechentechnik und Automatisierung herausgebildet.

Der vorliegende Beitrag der TU Dresden ist dem Gebiet CAD zuzuordnen und zeigt Möglichkeiten auf, wie mit Hilfe von Methoden der Differentialgeometrie und der Ausgleichungsrechnung der Entwurfsprozess doppelt gekrümmter /skulpturartiger/ Flächen qualitativ verbessert werden kann.

Prof.Dr.sc.techn.KOCHAN
Technische Universität Dresden
Sektion Fertigungstechnik
und Werkzeugmaschinen

Dr. HATVANY
Institut für Rechentechnik
und Automatisierung der
Ungarischen Akademie der
Wissenschaften

Budapest, 1978

Ein Beitrag
zur Theorie des Entwurfs doppelt gekrümmter Flächen unter
differentialgeometrischen und rechentechnischen Aspekten

Der Fakultät für Bau-, Wasser- und Forstwesen des Wissen-
schaftsrates der Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktor eines Wissenschaftszweiges

Dr.-Ing.

vorgelegte Dissertation.

Bonitz, Peter
geboren am 22. 11. 1940
in Göttingen

Tag der Einreichung: 15. 8. 1975

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. W. Rüger

Doz. Dr. rer. nat. E. Schröder

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Sauer

Dr.-Ing. K. H. Werler

Genehmigt / ~~nicht-genehmigt~~

Datum: 7. 4. 1976

Prof. Dr.-Ing. habil. H. Werner
Vorsitzender der Prüfungskommission

Inhaltsverzeichnis

	Seite
0. Einleitung	3
1. Differentialgeometrische Grundlagen und Betrachtungen	11
1.1. Das Prinzip des "Ansatzverfahrens" für den Flächenentwurfsprozess	11
1.2. Einige differentialgeometrische Untersuchungen über ebene Kurven	12
1.2.1. Gleichung eines hyperoskulierenden Schmiegekegelschnittes nebst ableitbaren Aussagen	12
1.2.2. Art des Schmiegekegelschnittes in einem Kurvenpunkt, in dem die Krümmung ein relatives Minimum darstellt	18
1.2.3. Untersuchung einiger elementarer Funktionen auf die Art ihrer Schmiegekegelschnitte	20
1.2.3.1. Kubische Parabel	20
1.2.3.2. Parabel vierter Ordnung	20
1.2.3.3. Sinus-Funktion	21
1.2.3.4. Exponentialfunktion	22
1.2.3.5. Cosinus-Hyperbolicus-Funktion	22
1.3. Schlussfolgerungen für den Entwurf von ebenen Kurven	23
1.4. Einige Grundformen der Flächentheorie	25
1.5. Folgerungen für den Flächenentwurfsprozess	28
2. Flächenentwurf auf der Grundlage von Stützkurven und geometrischen Vorgaben	30
2.1. Vorbetrachtungen zum Entwurf ebener Kurven	30
2.1.1. Vorauszusetzende Messdaten und geometrische Vorgaben	30
2.1.2. Lösungsansätze	31
2.1.2.1. Koeffizientenbestimmung ohne Standardvorgaben	32

2.1.2.2.	Koeffizientenbestimmung im Falle der Standardvorgaben Anfangspunkt, horizontale Anfangstangente und Anfangskrümmung	35
2.1.2.3.	Erweiterung des Punktes 2.1.2.2. um die Standardvorgabe: Anstieg der Affinnormalen im Anfangspunkt	38
2.1.2.4.	Erzeugen axialsymmetrischer Teilkurven	41
2.1.3.	Wertigkeit der Messdaten und Vorgaben für die Bestimmung der Koeffizienten der Kurve	42
2.2.	Entwurf von Drehflächen	42
2.3.	Entwurf von Flächen in der Darstellung $z = f(x, y)$	43
2.3.1.	Lösungsansätze	43
2.3.1.1.	Zwei vorgegebene Stützkurven: Eine Erzeugende - und eine Leitkurve	46
2.3.1.2.	Drei vorgegebene Stützkurven: Zwei Erzeugende - und eine Leitkurve	47
2.3.1.3.	Vier vorgegebene Stützkurven: Je zwei Erzeugende - und Leitkurven	49
2.3.1.4.	Mehr als vier vorgegebene Stützkurven: Eine Schar von Erzeugenden - und zwei Leitkurven	61
2.3.1.5.	Erzeugen symmetrischer Flächenstücke	65
2.3.2.	Zusammenschluss mehrerer Flächenstücke	66
2.3.3.	Separate Konstruktion von Rand- und Flächenkurven	70
2.4.	Entwurf von Flächen in GAUSSscher Parameterdarstellung	71
2.4.1.	Entwurf von räumlichen Stützkurven in Parameterdarstellung zur Verwendung als Erzeugende - und Leitkurven	72
2.4.2.	Näherungsweise Bestimmung der Bogenlänge einer räumlichen Stützkurve	73
2.4.3.	GAUSSsche Parameterdarstellung der entworfenen Fläche	74

2.4.4.	Die Kontrollfunktion der Differential- geometrie	75
2.4.5.	Zusammenschluss mehrerer Flächenstücke	77
3.	Entwurf von Flächen in der Darstellung $z = f(x, y)$ auf der Grundlage von Stütz- punkten und geometrischen Vorgaben	78
3.1.	Vorauszusetzende Messdaten und geometri- sche Vorgaben	78
3.2.	"FLÄCHENSEGMENT" - Ansatz	81
3.3.	"FLÄCHENPOLYNOM" - Ansatz	86
3.4.	Wertigkeit der Messdaten und Vorgaben für die Bestimmung der Koeffizienten der Fläche	90
3.5.	Zusammenschluss mehrerer Flächenstücke	92
3.6.	Separate Konstruktion von Rand- und Flächenkurven	98
4.	Superposition von Flächen	98
4.1.	Fall $z = f(x, y)$	98
4.2.	Fall $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$	98
5.	Rechentechnische Realisierung der Flächen- entwurfsverfahren einschliesslich numeri- scher und grafischer Kontrolle	101
6.	Anwendungen zu den Flächenentwurfsverfahren	104
7.	Zusammenfassung	108
Literatur		111
<u>Anlagen:</u>	11 Tafeln	119
	52 Bilder	130
	2 Kreisschablonen	176

0. Einleitung

Im sich gegenwärtig vollziehenden Prozess der wissenschaftlich-technischen Revolution stellt die Mathematik in Wechselwirkung mit der Informationsverarbeitung eine Hauptproduktivkraft dar. Dies gilt in besonderem Masse für den Komplex der Rationalisierung und Automatisierung der Produktion (AUTEVO, [1], S. 163). Mathematik und Rechentechnik ermöglichen schon in der Vorbereitungsphase der Produktion ein strukturelles Erfassen und Modellieren von technischen und gedanklichen Prozessen, insbesondere in der Phase des Entwurfs neuer technischer Gebilde. Dabei spielt seit einiger Zeit die graphische Datenverarbeitung eine bedeutende Rolle. So existieren z. B. SOFTWARE - Pakete, mit deren Hilfe Diagramme und Ablaufpläne verschiedener Art, diverse Konstruktionszeichnungen des Bauwesens, des Maschinen- und Schiffbaues sowie Abbilder elektronischer Schaltungen automatisch ausgegeben werden können ([29] bis [32]). Bausteine zu Zeichnungen dieser Art sind hauptsächlich Kombinationen geometrischer Grundelemente, wie z. B. Gerade, Kreis, Kegelschnitte, Kegel, Kugel und Zylinder.

In einigen Fällen ist die Rationalisierung durch den Einsatz von numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen bis zur teilautomatischen Fertigung fortgeschritten ([33] und [34]). Viele Industrieerzeugnisse bzw. ihre äusseren Verkleidungen bestehen jedoch aus Teilen, die sich aus obengenannten einfachen geometrischen Grundelementen nicht zusammensetzen lassen. Diese Teile werden von einigen Autoren summarisch als "skulpturartig" bezeichnet. In Anlehnung an die Terminologie der Differentialgeometrie wird in der vorliegenden Arbeit der Begriff "doppelt gekrümmt" verwendet, wobei die Oberfläche aus elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Punkten besteht. Doppelt gekrümmte Oberflächen sind mannigfaltig in der Natur vorhanden oder werden zu ver-

schiedenen Zwecken im Produktionsprozess geschaffen. Hier einige Beispiele, die unter dem Aspekt der Rationalisierung und Automatisierung der technischen Produktionsvorbereitung interessant sind:

Flugzeug-, Schiffs- und Bootskörperoberflächen, Karosserien von Automobilen und Schienenfahrzeugen, Propeller, Flächen im Bauwesen (Flächentragwerke) und der Architektur (Bauplastiken), diverse Erzeugnisse (Bauteile und äussere Hüllen) der Leicht- bzw. Konsumgüterindustrie, insbesondere der Elektroindustrie.

Neue Werkstoffe und Fertigungsverfahren gestatten eine grössere Variabilität der Formen und verlangen geradezu nach Ausschöpfung des möglichen Formenreichtums durch Anwendung mathematischer Flächenkonstruktionsverfahren. Mathematische Lösungsvorschläge zum Flächenentwurf und entsprechende rechentechnische Realisierungen wurden zunächst aus dem Flugzeug-, Automobil- und Schiffbau bekannt ([7], [14], [40] und [57]). Bald folgten durch Nachnutzung der entstandenen Verfahren die ersten Entwürfe von diversen Gebrauchsgegenständen für Industrie und Haushalt wie z. B. Waschbecken, Schuheleisten, Sessel, Kannen, Flaschen und Vasen ([43], [44], [50], [51] und [53]). Die zugrunde liegenden mathematischen Ansätze eignen sich ebenfalls prinzipiell zur stückweisen Beschreibung von Modellen oder Körpern und z. T. auch zur zweidimensionalen Interpolation. Das System FOMAT [6] ist ein Beispiel für die numerische Beschreibung von Modelloberflächen einschliesslich der Lösung des Problems der Messdatenerfassung mit Hilfe der Photogrammetrie. Zukunftsweisend beim Gestalten räumlicher Formen scheint jedoch das Ersetzen des vom Stilisten gefertigten Modells durch das mit Hilfe der Mathematik und der Rechentechnik entworfene, digitalgraphisch kontrollierte und NC - gefräste Modell zu sein, Rechner nebst Zeichenmaschinen und interaktiven Bildschirmgeräten werden zu Werkzeugen des Konstrukteurs und Form-

gestalters. Die international geprägte Hauptkategorie COMPUTER AIDED DESIGN - RECHNERGESTÜTZTER ENTWURF wird damit um ein wertvolles Element bereichert. In einem "Versuch-Irrtum-Prozess" kann der Konstrukteur die entworfene Fläche bei ständiger visueller Kontrolle solange durch Änderung der ursprünglichen Eingabedaten oder durch Hinzunahme weiterer Randbedingungen verändern, bis sie seinen Vorstellungen entspricht. Dabei muss ein gewisser Fundus an geometrischen Grundkenntnissen beim Konstrukteur vorausgesetzt werden, damit er diesen Prozess mit Sachkenntnis steuern kann. Nach der Begutachtung des graphischen Produktes kann sich der Konstrukteur für die Herstellung eines körperlichen Modells mit Hilfe der NC-Technik entscheiden. Beschreibungen zu entsprechenden Programmsystemen zur Erzeugung von Steuerlochstreifen für NC-Fräsmaschinen sind u. a. in [20], [41] und [55] zu finden.

Fertigungstechnische Probleme werden in den folgenden Kapiteln nicht behandelt.

Theoretische Grundlage für die "rechnergestützten" Entwürfe doppelt gekrümmter Flächen sind selbstverständlich die jeweiligen mathematischen Ansätze. Einen Überblick zu den bisher bekanntgewordenen Lösungen findet man in [7], [8], [37] und [38]. Diese Lösungen ziehen alle mehr oder weniger Iterationsverfahren nach sich. Die endgültige Form ergibt sich erst nach einem längeren Dialog zwischen Mensch und Maschine.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, unter Nutzung der Möglichkeiten der Differentialgeometrie und der Ausgleichungsrechnung ein Verfahren bereitzustellen, mit dessen Hilfe a priori die Einhaltung von geforderten geometrischen Eigenschaften der zu entwerfenden Fläche garantiert werden kann. Damit soll zugleich der Iterationsprozess beim Flächenentwurf verkürzt werden. Zudem wird durch die Realisierung von differentialgeometrischen Vorgaben höherer Ordnung der Versuch unternommen, auch zu ästhetisch befriedigenden Lösun-

gen zu gelangen. Wenn z. B. beim Entwerfen von Ausgangsgrundkurven zur Flächenkonstruktion gewisse Regeln der Formgestaltung in geometrische Forderungen umgesetzt werden, so wird diese Vorgehensweise ohne Zweifel für die anzustrebende ästhetische Formgestaltung nützlich sein.

Ferner ist zu bemerken, dass die Forderung nach rechnerischer Realisierung die mathematische Schreibweise und die Algorithmen naturgemäss beeinflusst hat. Demzufolge wurden vielfach Bezeichnungen verwendet, die von der üblichen mathematischen Notation abweichen. Der Anwender soll von vornherein an die Namen der Variablen und Felder gewöhnt werden, die in den Programmen vorkommen. Die Algorithmen wurden konsequent dynamisch aufgebaut, um die Möglichkeiten von ALGOL 60 voll ausnutzen zu können.

Die eingereichte Arbeit einschliesslich der Programmsysteme (Anlage zu [9]) entstand im Rahmen der Vertragsforschung und erforderte eine intersektionelle Zusammenarbeit an der Technischen Universität Dresden sowie die fördernde Kritik der potentiellen Anwender in der Industrie.

Für die wissenschaftliche und wissenschaftlich-organisatorische Unterstützung danke ich besonders

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. P e s c h e l

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. R ü g e r

Herrn Doz. Dr. rer. nat. E. S c h r ö d e r

Herrn Dr.-Ing. K. H. W e r l e r

und

Herrn Oberingenieur W. S c h u p p

1. Differentialgeometrische Grundlagen und Betrachtungen

1.1. Das Prinzip des "Ansatzverfahrens" für den Flächenentwurfsprozess

Es wird vorausgesetzt, dass von der Fläche eine Erstentwurfszeichnung in wenigstens zwei Rissebenen in Form einiger charakteristischer Kurven oder eines grobmaschigen Netzes vorliegt. Diesem Erstentwurf werden an markanten Punkten, z. B. Randpunkten, Extremalstellen oder Sattelpunkten die Tangentenanstiege, Krümmungen, Anstiege von Affinnormalen und eventuell auch die Art der von vierter Ordnung berührenden Schmiegekegelschnitte mit einfachen Hilfsmitteln /Schablonen/ entnommen. Diese geometrischen Daten fließen unmittelbar in den funktionalen Ansatz auf Grund der noch bereitzustellenden Grundkenntnisse über einige elementare Funktionen ein. Die Untersuchungen zeigen, dass die Realisierung von geometrischen Vorgaben mit hoher Berührungsordnung bei Verwendung von Polynomen dritter Ordnung nicht möglich ist. Das Ansatzverfahren, welches im Falle von Polynomansätzen auf höhere Ordnungen orientiert, garantiert eine gute Anpassungsfähigkeit an geometrische Vorgaben und eröffnet Möglichkeiten zur Absicherung gegen unerwünschte Nebeneffekte, wie z. B. Wendepunkte an dafür nicht vorgesehenen Stellen oder Wellenbildung über grössere Intervalle. Zur Senkung des Rechenaufwandes ist eine grössere Segmentierung der zu entwerfenden Fläche möglich.

Die Umsetzung der geometrischen Vorgaben in entsprechende rechentechnische Ansätze ermöglicht eine Verkürzung des iterativen Flächenentwurfsprozesses und rationalisiert den Dialog Mensch - Maschine.

Für das praktische Vorgehen wurden im Ansatzverfahren folgende Grundsätze beachtet:

● Beschränkung auf elementare Funktionen

Kommentar: Untersucht werden Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen.

● Analytische Fassung bestimmter geometrischer Forderungen, welche im Lösungsansatz im Sinne von Nebenbedingungen von vornherein zu berücksichtigen sind

Kommentar: Dabei werden erstmals geometrische Vorgaben mit hoher geometrischer Berührungsordnung einbezogen.

● Realisierung dieser geometrischen Forderungen mit Hilfe der Ausgleichsrechnung und der bereitgestellten Funktionen

Kommentar: Hierbei wird ein komplettes Programmsystem zu sämtlichen Fällen der Ausgleichsrechnung genutzt (siehe [12]). Insbesondere wird die Variante "Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen" verwendet. Die Terminologie gründet sich auf [10] und [21].

1.2. Einige differentialgeometrische Untersuchungen über ebene Kurven

Die folgenden Ableitungen nebst Diskussion sollen dazu beitragen, Kenntnisse über geometrische Eigenschaften von Ansatzkurven zu vermitteln.

1.2.1. Gleichung eines hyperoskulierenden Schmiegekegelschnittes nebst ableitbaren Aussagen

Von der Ansatzkurve $z = f(x)$ werde vorausgesetzt, dass sie in dem betrachteten Intervall $[x_a, x_e]$ viermal stetig differenzierbar ist. Nun sei zu einem Kurvenpunkt $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ mit $x_a < x_1 < x_e$ die Gleichung des $f(x)$ von vierter Ordnung be-

rührenden Schmiegekegelschnittes hergeleitet. Zunächst führen wir eine Koordinatentransformation aus, so dass P_1 zum Ursprung wird:

$$\begin{aligned}\xi &= x - x_1 \\ \eta &= y - y_1\end{aligned}\quad (D 1)$$

Dabei geht $z = f(x)$ in $\eta = \rho(\xi)$ als Gleichung für die zu betrachtende Kurve c über.

Ferner gilt:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\rho}{d\xi}, \quad \frac{d^i f}{dx^i} = \frac{d^i \rho}{d\xi^i}, \quad i=2, 3, 4 \quad (D 2)$$

Nach dieser Koordinatentransformation lautet der Ansatz für den die Kurve c in P_1 berührenden hyperoskulierenden Kegelschnitt

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\eta = 0 \quad (D 3)$$

Setzt man in (D 3) $\eta = \rho(\xi)$ und bildet die Ableitungen bis zur vierten Ordnung nach ξ , so ergibt sich das Gleichungssystem:

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\rho(\xi) + a_{22}\rho(\xi)^2 + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\rho(\xi) = 0$$

$$a_{11}\xi + a_{12}(\xi\rho' + \rho) + a_{22}\rho\cdot\rho' + a_{13} + a_{23}\rho' = 0 \quad (D 4)$$

$$a_{11} + a_{12}(\xi\rho'' + 2\rho') + a_{22}(\rho'^2 + \rho\cdot\rho'') + a_{23}\rho'' = 0$$

$$a_{12}(\xi\rho''' + 3\rho'') + a_{22}(3\rho'\rho'' + \rho\cdot\rho''') + a_{23}\rho''' = 0$$

$$a_{12}(\xi\rho^{(4)} + 4\rho''') + a_{22}(4\rho'\rho''' + 3\rho''^2 + \rho\cdot\rho^{(4)}) + a_{23}\rho^{(4)} = 0$$

Um nun zu einem System von Bestimmungsgleichungen für die noch unbekannten Koeffizienten

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}$$

zu gelangen, setzen wir in (D 4) die Variable $\xi = 0$. Ferner ist zu beachten:

$$\rho(0) = 0, \rho'(0) = \rho'_0, \rho''(0) = \rho''_0, \rho'''(0) = \rho'''_0, \rho^{IV}(0) = \rho^{IV}_0 \quad D(5)$$

Die Gleichungen D 3 und die zweite bis fünfte Gleichung von (D 4) bilden ein homogenes lineares Gleichungssystem in den fünf Unbekannten.

Mit (D 5) erhält man die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\eta &= 0 \\ a_{13} + a_{23}\rho'_0 &= 0 \\ a_{11} + a_{12} \cdot 2\rho'_0 + a_{22} \cdot \rho_0'^2 + a_{23}\rho''_0 &= 0 \\ a_{12} \cdot 3\rho''_0 + a_{22} \cdot 3\rho'_0\rho''_0 + a_{23}\rho_0''' &= 0 \\ a_{12} \cdot 4\rho_0''' + a_{22}(4\rho'_0\rho_0''' + 3\rho_0''^2) + a_{23}\rho_0^{IV} &= 0 \end{aligned} \quad D(6)$$

Dieses Gleichungssystem (D 6) ist nach Sätzen der Linearen Algebra genau dann nichttrivial lösbar für $a_{i,k}$, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix}
 \zeta^2 & 2\zeta\eta & \eta^2 & 2\zeta & 2\eta \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \rho'_0 \\
 1 & 2\rho'_0 & \rho'^2_0 & 0 & \rho''_0 \\
 0 & 3\rho''_0 & 3\rho'_0\rho''_0 & 0 & \rho'''_0 \\
 0 & 4\rho'''_0 & 4\rho'_0\rho''_0 + 3\rho''^2_0 & 0 & \rho^{IV}_0
 \end{vmatrix} = 0 \quad (D 7)$$

(D 7) stellt bereits die Gleichung des gesuchten hyperoskulierenden Kegelschnittes dar. Mittels (D 1) lässt sie sich leicht in das ursprüngliche Koordinatensystem zurücktransformieren. Zur Vereinfachung der Untersuchungen behalten wir jedoch das ξ, η -System zunächst bei.

Die Entwicklung der Determinante nach den Elementen der ersten Zeile ergibt:

$$\begin{aligned}
& (9\rho_0''^4 + 3\rho_0'^2 \rho_0'' \rho_0'''' - 6\rho_0' \rho_0''^2 \rho_0''' - 4\rho_0'^2 \rho_0'''^2) \xi^2 \\
& + 2(4\rho_0' \rho_0'''^2 + 3\rho_0''^2 \rho_0''' - 3\rho_0' \rho_0'' \rho_0'''') \xi \eta \\
& + (3\rho_0'' \rho_0'''' - 4\rho_0' \rho_0''^2) \eta^2 + 18\rho_0' \rho_0''^3 \cdot \xi - 18\rho_0''^3 \cdot \eta = 0
\end{aligned} \tag{D 8}$$

Durch Vergleich von (D 8) mit (D 3) findet man:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 9\rho_0''^4 + 3\rho_0'^2 \rho_0'' \rho_0'''' - 6\rho_0' \rho_0''^2 \rho_0''' - 4\rho_0'^2 \rho_0'''^2 \\
a_{12} &= 4\rho_0' \rho_0'''^2 + 3\rho_0''^2 \rho_0''' - 3\rho_0' \rho_0'' \rho_0'''' \\
a_{13} &= 9\rho_0' \rho_0''^3 \\
a_{22} &= 3\rho_0'' \rho_0'''' - 4\rho_0' \rho_0''^2 \\
a_{23} &= -9\rho_0''^3
\end{aligned} \tag{D 9}$$

Für den Schmiegekegelschnitt gilt die Matrizendarstellung:

$$\vec{x}^T \underline{A} \vec{x} = 0 \tag{D 10}$$

mit

$$\vec{x}^T = (\xi \ \eta \ 1)$$

und

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$

und $a_{33} = 0$

Zunächst interessiert die Determinante der Formmatrix von (D 10).

Man erhält:

$$\det \underline{A} = -9^3 \cdot \rho^{10} \quad (D 11)$$

Determinante \underline{A} ist eine nichtpositive Zahl. Sie verschwindet lediglich für $\rho'' = 0$. Es folgt der Satz:

Für Wendepunkte zerfällt der Schmiegekegelschnitt. Das Zerfallsprodukt ist die doppelt zu zählende Wendetangente.

Ferner interessieren die Adjunkten A_{31} , A_{32} und A_{33} aus der Matrix \underline{A} .

Die Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} A_{31} &= -27\rho''^5 \rho'''' \\ A_{32} &= 27\rho''^5 (3\rho''^2 - \rho' \rho'''') \\ A_{33} &= 9\rho''^4 (3\rho'' \rho'''' - 5\rho' \rho''^2) \end{aligned} \quad (D 12)$$

Der Mittelpunkt $M(p, q)$ hat nach bekannten Sätzen der Analytischen Geometrie folgende Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{3\rho'' \rho'''}{5\rho' \rho''^2 - 3\rho'' \rho''''} \\ q &= \frac{A_{32}}{A_{33}} = \frac{3\rho'' (\rho' \rho'''' - 3\rho''^2)}{5\rho' \rho''^2 - 3\rho'' \rho''''} \end{aligned} \right\} \quad (D 13)$$

Daraus folgt für den Anstieg der Affinnormalen in P_1 :

$$m_{A_1} = \frac{A_{32}}{A_{31}} = \frac{\rho' \rho'''' - 3\rho''^2}{\rho' \rho''} \quad (D 14)$$

Steht die Affinnormale senkrecht zur Tangente, gilt

$$m_A = -\frac{1}{\rho'}, \text{ also } -\frac{1}{\rho'} = \frac{\rho' \rho'' - 3\rho''^2}{\rho'^2}$$

Diese Gleichung ist äquivalent mit der Scheitelbedingung

$$\rho'^2 \rho'' + \rho'' - 3\rho' \rho''^2 = 0 \quad (D 15)$$

Hieraus folgt der Satz:

In Punkten stationärer Krümmung fallen Affinnormale und Kurvennormale zusammen.

Fällt die Affinnormale mit der Tangente zusammen, gilt

$$\rho' = \frac{\rho' \rho'' - 3\rho''^2}{\rho''}, \text{ d.h. } \rho''^2 = 0 \quad (D 16)$$

Das Zusammenfallen der Affinnormalen mit der Kurventangente ist äquivalent mit der Aussage, dass ein Wendepunkt vorliegt.

In dem Sonderfall eines relativen Extremums der ebenen Kurve c gilt für den Anstieg der Affinnormalen:

$$m_A = -3 \frac{\rho''^2}{\rho'^2} \text{ und für die Kurvenkrümmung } \kappa = \rho'' \quad (D 17)$$

Weiterer Untersuchungsgegenstand ist die Art des die Kurve c in P_1 von vierter Ordnung berührenden Schmiegekegelschnittes. Nach bekannten Sätzen des Analytischen Geometrie ist hierfür das Vorzeichen der Adjunkte A_{33} entscheidend. Unter der Voraussetzung der $\underline{A} \neq 0$ gilt:

Für A_{33}	$\begin{Bmatrix} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$	ist der Schmiegekegelschnitt eine nichtzerfallende	$\begin{Bmatrix} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{Bmatrix}$
--------------	---	--	---

Nach (D 12) gilt daher der Satz:

Für jene Punkte der Kurve c, in denen $\rho'' \neq 0$ gilt, ist der zugehörige Schmiegkegelschnitt eine

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\} \quad \text{wenn} \quad 3\rho''\rho^{IV} - 5\rho'^{''2} \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{gilt.} \\ \\ \end{array} \quad (D 18)$$

Aus (D 18) folgt weiter:

- Eine nur aus elliptischen Punkten bestehende Kurve besitzt keine Wendepunkte.
- Zu einem Wendepunkt gibt es stets eine punktierte Umgebung auf der Kurve c, in der es nur Punkte hyperbolischer Krümmung gibt.

Die Formeln (D 11), (D 14), (D 15), (D 16), (D 17), (D 18) mit den zugehörigen Aussagen behalten ihre Gültigkeit, wenn man darin die Ableitungen von $\rho(\xi)$ nach ξ durch die Ableitungen von $f(x)$ nach x ersetzt.

Abkürzend werde nun

$$3\rho''\rho^{IV} - 5\rho'^{''2} = 3f''(x) \cdot f^{IV}(x) - 5f'^{''2}(x) = \Phi(x) \quad (D 19)$$

gesetzt.

1.2.2. Art des Schmiegkegelschnittes in einem Kurvenpunkt, in dem die Krümmung ein relatives Minimum darstellt

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Kurve in dem zu untersuchenden Punkt eine horizontale Tangente besitzt. Dieser Punkt liege im Ursprung des Achsenkreuzes. Zunächst betrachten wir die Krümmung und ihre erste und zweite Ableitung:

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad \kappa(0) = y''(0) \quad \text{wegen } y'(0) = 0$$

$$\kappa' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2} y''' - \frac{3}{2}(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y' \cdot y''^2}{(1 + y'^2)^3} =$$

$$= \frac{(1 + y'^2) y''' - 3y' y''^2}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\kappa'(0) = 0 \text{ nach Voraussetzung} \Rightarrow y'''(0) = 0$$

$$\kappa'' = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}} [2y' y'' y''' + (1 + y'^2) y'''' - 3y''^3 - 6y' y'' y''']}{(1 + y'^2)^5} -$$

$$- \frac{[(1 + y'^2) y''' - 3y' y''^2] \cdot \frac{5}{2}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2y' \cdot y''}{(1 + y'^2)^5}$$

Mit $y'(0) = y'''(0) = 0$

ergibt sich $\kappa''(0) = y''''(0) - 3y''^3(0)$

Ferner gilt $\kappa''(0) > 0$ (wegen rel. Min.)

somit $y''''(0) - 3y''^3(0) > 0$ (D 20)

oder $y''''(0) > 3y''^3(0)$

Mit $y'''(0) = 0$ erscheint das Kriterium (D 19) in der Form

$$\Phi(x_0) = \Delta_0 = 3y_0'' y_0'''' \quad (\text{D 21})$$

Wegen (D 20) gilt aber nun

$$\Delta_0 = 3y_0'' y_0'''' > 9y_0''^4 > 0$$

also $\Delta_0 > 0$ und nach Vergleich mit (D 18) folgt der Satz:

In einem Kurvenpunkt, in dem die Krümmung κ ein relatives Minimum darstellt ($\kappa'(0) > 0$), sowie in einer Umgebung dieses Punktes sind die zugehörigen Schmiegekegelschnitte Ellipsen.

1.2.3. Untersuchung einiger elementarer Funktionen auf die Art ihrer Schmiegekegelschnitte

1.2.3.1. Kubische Parabel

Wir betrachten

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x \\ f'''(x) &= 6a_3 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

und finden $\Phi(x) = -180 a_3^2 < 0$

Folgerung: Die allgemeine kubische Parabel lässt für alle vom Wendepunkt verschiedenen Punkte nur nichtzerfallende Hyperbeln als Schmiegekegelschnitte zu.

1.2.3.2. Parabel vierter Ordnung

Notiert sei:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4x$$

$$f^{IV}(x) = 24a_4$$

$$\text{somit } \frac{\Phi(x)}{36} = -56a_4^2x^2 - 28a_3a_4x - 5a_3^2 + 4a_2a_4$$

Wie sich leicht zeigen lässt, ist $\Phi(x)$ negativ definit, wenn

$$3a_3^2 - 8a_2a_4 > 0 \quad (D 22)$$

gilt.

Für diesen Fall liegen dann auch die Wendepunkte getrennt reell.

$$\text{Gilt jedoch } 3a_3^2 - 8a_2a_4 < 0, \quad (D 23)$$

so sind die beiden auf dieser Parabel vierter Ordnung möglichen Wendepunkte konjugiert komplex. In diesem Fall ist auch $\Phi(x)$ eine indefinite Form. Dies bedeutet, dass die Parabel vierter Ordnung Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Schmiegekegelschnitte zulässt. Singuläre Fälle von Schmiegekegelschnitten /Wendepunkte/ treten dann nicht auf.

1.2.3.3. Sinus-Funktion

$$\begin{aligned} \text{Gegeben sei } f(x) &= \sin ax, \\ \text{folglich } f'(x) &= a \cdot \cos ax \\ f''(x) &= -a^2 \cdot \sin ax \\ f'''(x) &= -a^3 \cdot \cos ax \\ f^{IV}(x) &= a^4 \cdot \sin ax \end{aligned}$$

$$\text{und } \Phi(x) = -a^6(3\sin^2 ax + 5\cos^2 ax) < 0$$

Folgerung: Die Sinuslinie lässt nur Hyperbeln als Schmiegekegelschnitte zu. Für Wendepunkte tritt der bereits beschriebene Zerfall ein.

1.2.3.4. Exponentialfunktion

Es sei betrachtet

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} \\ f'(x) &= a \cdot e^{ax} \\ f''(x) &= a^2 \cdot e^{ax} \\ f'''(x) &= a^3 \cdot e^{ax} \\ f^{iv}(x) &= a^4 \cdot e^{ax} \end{aligned}$$

und $\Phi(x) = -2a^6(e^{ax})^2 < 0$

Folgerung: Die Exponentialfunktion lässt nur Hyperbeln als Schmiegekegelschnitte zu.

Da die Exponentialfunktion keine Wendepunkte besitzt, sind die Schmieghyperbeln für jeden Kurvenpunkt regulär.
Die gleiche Aussage gilt für die Logarithmus-Funktion.

1.2.3.5. Cosinus-Hyperbolicus-Funktion

Diskutiert werde

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh ax \\ f'(x) &= a \sinh ax \\ f''(x) &= a^2 \cdot \cosh ax \\ f'''(x) &= a^3 \cdot \sinh ax \\ f^{iv}(x) &= a^4 \cdot \cosh ax \end{aligned}$$

Es ergibt sich: $\Phi(x) = a^6(3\cosh^2 ax - 5\sinh^2 ax)$

Feststellung: $\Phi(x)$ ist eine indefinite Form.

Folgerung: Die Kettenlinie besitzt Punkte elliptischer, parabolischer und hyperbolischer Krümmung. Im Scheitel und in einer Umgebung dieses Punktes ist sie stets elliptisch gekrümmt.

Die Kettenlinie $f(x) = \cosh ax$ entsteht durch Superposition der Funktionen $\frac{1}{2} e^{ax}$ und $\frac{1}{2} e^{-ax}$. Diese besitzen nur nicht-zerfallende Hyperbeln als Schmiegekegelschnitte, während die Kettenlinie Hyperbeln, Parabeln und Ellipsen als hyperoskulierende Schmiegekegelschnitte zulässt.

Das Beispiel zeigt also, dass die Art der Schmiegekegelschnitte nicht invariant gegenüber Superpositionen ist. Hingegen ist die Art des Schmiegekegelschnittes an eine vorgegebene Kurve c invariant gegenüber affinen Transformationen.

Diese Feststellung ist wichtig, da im Konstruktionsprozess vielfach mit affinen Transformationen gearbeitet wird.

1.3. Schlussfolgerungen für den Entwurf von ebenen Kurven

Mit Parabeln dritter Ordnung ist eine geometrisch adäquate Beschreibung von vielen Kurven nicht möglich. Eine brauchbare Angleichung an die Vorgaben ist mit kubischen Parabeln vielfach nur durch eine sehr feine Segmentierung erreichbar.

Der gleiche Nachteil ist beim rechnergestützten Simulieren des vor allem im Schiffbau gebräuchlichen Strakverfahrens zu verzeichnen, weil dabei die Biegenlinien der homogenen Leisten gewöhnlich durch kubische Parabeln approximiert werden. Damit wird den verwendeten Linien die erwähnte lokale Eigenschaft, nur Hyperbeln als Schmiegekegelschnitte zu besitzen, global aufgeprägt.

Sowohl von der Sache wie von dem ästhetischen Anliegen her sind solche Einschränkungen a priori nicht gerechtfertigt. Z.B. wurde in [2] nachgewiesen, dass eine unter der Eulerschen Knicklast erzeugte Biegenlinie von einer bestimmten Durchbiegung an im Scheitel und in einer gewissen (mit der Durchbiegung grösser werdenden) Umgebung dieses Punktes nur Ellipsen als Schmiegekegelschnitte zulässt. Vor allem bei Kurven mit stark variierender Krümmung bedeutet eine Beschränkung der Kurvenauswahl auf kubische Parabeln eine unzulässige Einengung sowohl für die Beschreibung wie auch für den Entwurfsprozess. Bei Ansätzen mit Potenzfunktionen ist also wenigstens die vierte Potenz mitzuführen. An einer Parabel vierter Ordnung ist bei Einhaltung der Nebenbedingung (D 23) die Existenz von elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Punkten gesichert. Die Anpassungsfähigkeit erhöht sich, wenn in die Ansätze die zu erfüllenden Nebenbedingungen sofort mit einfließen.

Wählt man andererseits die Ordnung $\varnothing R > 5$, so neigt die entsprechende Kurve zur Wellenbildung.

Folgerung: Bei Polynomansätzen sollte die Ungleichung $3 < \varnothing R < 6$ eingehalten werden.

Die zielgerichteten Ansätze in Verbindung mit geometrischen Vorgaben verschiedener Art, die in den kommenden Abschnitten diskutiert werden, tragen dazu bei, unerwartete Abweichungen vom gewünschten Kurvenverlauf weitestgehend zu vermeiden.

Für die Auswertung von Erstentwurfszeichnungen zur Aufstellung eines möglichst optimal angepassten rechnerischen Ansatzes ist zu beachten:

Zwischen der Kurve c und dem Krümmungskreis liegt eine Berührung zweiter Ordnung vor. Die Berührung ist in P_1 durchsetzend. Zwischen der Kurve c und der Schmiegeparabel /Auswertung von Krümmungskreis und Affinnormale/ liegt eine Berührung dritter Ordnung vor. Die Berührung erfolgt einseitig von innen oder von aussen.

Zwischen der Kurve c und dem hyperoskulierenden Schmiegekegelschnitt liegt eine Berührung vierter Ordnung vor. Diese Berührung ist durchsetzend. Für Punkte stationärer Krümmung sind gesonderte Überlegungen erforderlich, da sich hier die Berührungsordnung erhöht.

Rein synthetisch lässt sich der grundlegende Unterschied von elliptischem und hyperbolischem Punkt wie folgt fassen:

Für einen elliptischen Kurvenpunkt liegen zugehöriger Krümmungsmittel- und Mittelpunkt des hyperoskulierenden Schmiegekegelschnittes auf einer Seite der Kurventangente durch P_1 .

Für einen hyperbolischen Kurvenpunkt liegen zugehöriger Krümmungsmittel- und Mittelpunkt des hyperoskulierenden Schmiegekegelschnittes entgegengesetzt bezüglich der Kurventangente durch P_1 .

Die Affinnormale ist die Verbindungsgerade des Kurvenpunktes P_1 mit dem Mittelpunkt M des Schmiegekegelschnittes. Aus der Erstentwurfszeichnung kann der Anstieg der Affinnormalen bezüglich eines Kurvenpunktes konstruktiv gemäss den Bildern 3 und 23 bis 26 gewonnen werden.

Trotz der Hauptorientierung auf Polynomansätze sei hier hervor-gehoben, dass auch die Kenntnis der lokalen (und teilweise auch globalen) Eigenschaften der Sinuslinie, der Exponential- und anderer Funktionen für eine zielgerichtete Verwendung dieser Funktionen im Ansatzverfahren nicht zu unterschätzen ist.

1.4. Einige Grundformen der Flächentheorie

Es seien hier lediglich die Grundformen zusammengestellt, die für den Flächenentwurf Bedeutung haben. Dabei soll eine tabellarische Übersicht genügen. Bezüglich ausführlicher Darstellungen der Flächentheorie sei auf bekannte Grundlagenwerke, wie z.B. [3], [4], [5], [23] und [28], verwiesen.

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Grundformen im Hinblick auf die NC-Frästechnik ist in [20] zu finden.

Die folgende Übersicht geht auf [22] zurück.

Wir gehen aus von $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$

Dann sind:

Fundamentalgrössen I. Art: $E = \vec{x}_u^2$ (D 24)

$G = \vec{x}_v^2$

Hilfsgrösse $F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$

$w = \sqrt{EG - F^2}$

Flächennormale $\vec{z} = \frac{1}{w} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)$ (D 25)

Fundamentalgrössen II. Art: $L = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} \vec{x}_{uu} & \vec{x}_u & \vec{x}_v \end{vmatrix}$

Spatprodukt! $M = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} \vec{x}_{uv} & \vec{x}_u & \vec{x}_v \end{vmatrix}$ (D 26)

$N = \frac{1}{w} \begin{vmatrix} \vec{x}_{vv} & \vec{x}_u & \vec{x}_v \end{vmatrix}$

Bogenlänge einer Flächenkurve: $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$ (D 27)

1. Fundamentalform der
Flächentheorie:

wobei

Tangentenvektor einer
Flächenkurve:

Flächenelement:

Gesamtfläche:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (D 28)$$

$$du = \dot{u} \cdot dt \quad \text{und} \quad dv = \dot{v} \cdot dt$$

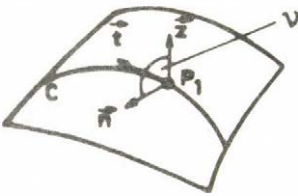
$$\dot{\vec{x}} = \vec{x}_u \cdot \dot{u} + \vec{x}_v \cdot \dot{v} \quad (D 29)$$

$$\left. \begin{aligned} d\vec{f} &= \sqrt{EG - F^2} \, dudv \\ \vec{f} &= \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{EG - F^2} \, dudv \end{aligned} \right\} (D 30)$$

2. Fundamentalform der
Flächentheorie:

$$(L du^2 + 2M dudv + N dv^2) \quad (D 31)$$

Winkel ν zwischen der Haupt-
normalen \vec{n} der Flächenkurve c
und der Flächennormale \vec{z}



$$\frac{\cos \nu}{\rho} = \frac{L du^2 + 2M dudv + N dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2} \quad (D 32)$$

wobei ρ : Krümmungsradius der
Flächenkurve in Punkt P_1

Sonderfall Wendelinie, wenn $\nu = \frac{\pi}{2}$

Sonderfall Normalschnitt, wenn $\nu = 0$; ρ wird dann zu R .

DG für die Krümmungslinien:

$$(LF - EM)\dot{u}^2 + (LG - EN)\dot{u}\dot{v} + (MG - FN)\dot{v}^2 = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad (D 33)$$

D(33) versagt für Punkte in denen $E : F : G = L : M : N$
gilt! (Nabelpunkte)

Die Hauptkrümmungen $K_1 = \frac{1}{R_1}$ und $K_2 = \frac{1}{R_2}$
zu Hauptkrümmungsrichtungen ergeben sich aus

$$\frac{1}{R^2} - \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \cdot \frac{1}{R} + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \quad (D 34)$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmt man aus (D 33),

$$\text{GAUSSsches Krümmungsmass } K: K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\text{D } 35)$$

$$\text{Mittlere Krümmung } H: H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (\text{D } 36)$$

Nützlich ist auch ein zweiter Weg zur Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen :

Nachdem man R_1 und R_2 aus (D 34) ermittelt hat, ergeben die Hauptkrümmungsrichtungen auch aus:

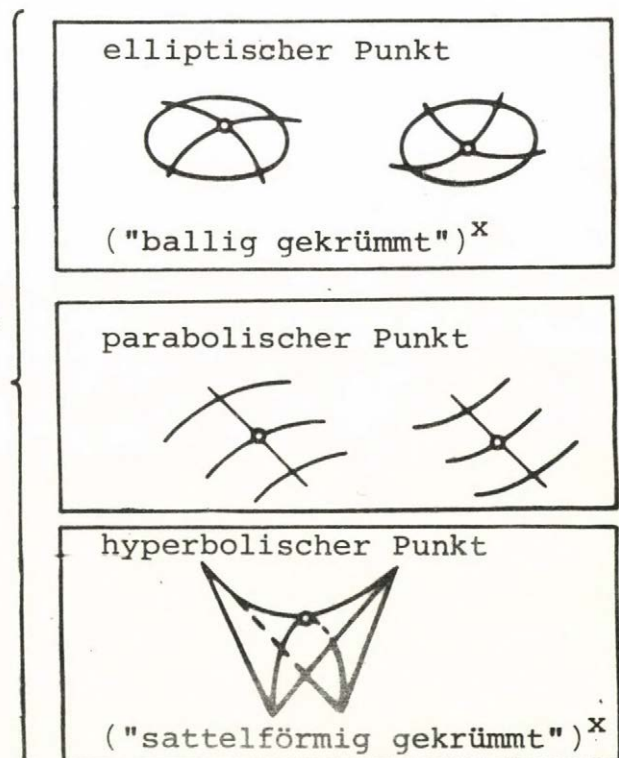
$$\left(\frac{du}{dv} \right)_i = - \frac{E - R_i L}{F - R_i M} = - \frac{F - R_i M}{G - R_i N} \quad i=1,2 \quad (\text{D } 37)$$

Die Krümmungslinien bilden auf der Fläche ein orthogonales Netz.

Gebietseinteilung nach elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Punkten:

(D 38)

$$LN - M^2 = \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \quad 0 \Leftrightarrow K = \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \quad 0 \Leftrightarrow$$



^x Diese Bezeichnungen werden häufig vom Techniker gebraucht

1.5. Folgerungen für den Flächenentwurfsprozess

Wie aus der Gliederung hervorgeht, unterscheiden wir Flächenentwurfsverfahren, die sich auf den Entwurf von ebenen Kurvennetzen zurückführen lassen (Abschnitt 2) und solche, die auf Stützpunktmessungen bzw. Fixpunktvorgaben beruhen (Abschnitt 3).

Das Resultat beider Wege ist eine geschlossene Flächendarstellung der Form $z = f(x, y)$ oder $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$. Mithin sind in beiden Fällen die in 1.4. zusammengestellten Grundformen verwendbar. Im ersten Falle /Stützkurvenverfahren/ dient das formelmässige Grundgerüst der Flächentheorie der Qualitätskontrolle der entworfenen Fläche /siehe 2.4.4./. Im zweiten Fall /Stützpunktverfahren/ kann diese Aufgabe zwar auch in analoger Weise in Angriff genommen werden, aber hier ist zudem die wesentliche Möglichkeit vorhanden, der zu entwerfenden Fläche a priori /über die in Nebenbedingungen umzusetzenden zutreffenden Aussagen aus 1.4./ lokale Eigenschaften an bestimmten Flächenpunkten aufzuzwingen. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass die globale Ausstrahlung von lokalen Eigenschaften nicht so weitreichend wie bei den ebenen Kurven sein wird, weil bezüglich der Fläche ein zweidimensionales Berührungsproblem vorliegt.

Beim dokumentierten Entwicklungsstand des Ansatzverfahrens sind folgende Vorteile zu verzeichnen:

1. Der Theoretiker kann bei Beachtung der dargelegten theoretischen Zusammenhänge Ansatzfunktionen zweckentsprechend auswählen und schon beim Ansatz über bestimmte Koeffizienten sinnvoll verfügen, um gewisse lokale und globale Eigenschaften von Flächen und Kurven zu garantieren.
2. Dem Praktiker stehen diverse Standardansätze zur Verfügung, die leicht handhabbar und rechentechnisch realisierungsfähig sind /siehe Abschnitt 6 und [9]/. Dabei nimmt der Anwender

den komplizierten Mechanismus zur Realisierung der geometrischen Forderungen nicht wahr. Der Nutzer hat lediglich die Vorgaben mit Hilfe von Schablonen und eines Digitalisiergerätes aus der Erstentwurfszeichnung zu entnehmen.

2. Flächenentwurf auf der Grundlage von Stützkurven und geometrischen Vorgaben

2.1. Vorbetrachtung zur Entwurf ebener Kurven

2.1.1. Vorauszusetzende Messdaten und geometrische Vorgaben

Grundlage für den Entwurf einer ebenen Kurve $y = f(x)$ sollen eine Anzahl gemessener Stützpunkte und geometrische Vorgaben sein. Dabei lassen wir die beiden Sonderfälle

- Kurve nur durch gemessene Stützpunkte und
- Kurve nur durch geometrische Vorgaben festgelegt, zu.

Folgende Bezeichnungen werden vereinbart:

Mit Messfehlern behaftete Stützpunkte:

S_j - Stützpunkt

Geometrische Vorgaben:

P_k - Fixpunkt

T_l - Tangentenanstieg

KR_m - Krümmung

$j = 1, 2, \dots, n$ n, np, nt, nkr :
 $k = 1, 2, \dots, np$ Jeweilige Anzahl
 $l = 1, 2, \dots, nt$ der Messpunkte bzw.
 $m = 1, 2, \dots, nkr$ konkreten Vorgaben

Bekanntlich gilt im kartesischen Koordinatensystem:

$$S_j = (x_j, y_j)$$

$$P_k = (x_k, y_k)$$

$$T_l = y'_1 \approx \left(\frac{dy}{dx} \right)_1$$

$$KR_m = \left(\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right)_m = \left(\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{3/2}} \right)_m$$

Sind in ausgezeichneten Punkten der Kurve Extremwerte bzw. Wendepunkte vorgesehen, so können diese Vorgaben über die Fixpunkt-, Anstiegs- und Krümmungsbedingungen realisiert werden.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} P_{\max} &= (x_{\max}, y_{\max}) && - \text{Maximum} \\ P_{\min} &= (x_{\min}, y_{\min}) && - \text{Minimum} \\ P_w &= (x_w, y_w) && - \text{Wendepunkt} \end{aligned}$$

lassen sich bekannte Aussagenverbindungen notieren:

$$\begin{aligned} P_{\max} &\Leftrightarrow y'(x_{\max}) = 0 \quad \wedge \quad y''(x_{\max}) < 0 \\ P_{\min} &\Leftrightarrow y'(x_{\min}) = 0 \quad \wedge \quad y''(x_{\min}) > 0 \\ P_w &\Leftrightarrow y''(x_w) = 0 \quad \wedge \quad y'''(x_w) \neq 0 \end{aligned}$$

Gilt zusätzlich noch

$y'(x_w) = 0$, so handelt es sich um
einen Stufenpunkt P_s

Die dritte Ableitung gibt man im allgemeinen nicht vor. Eine sich im Hinblick auf die Rechentechnik anbietende Kontrolle für die Einhaltung der Wendepunktbedingung ist:

$$\operatorname{sgn} A = - \operatorname{sgn} B$$

mit

$$A = y''(x_w - \varepsilon) \quad \text{und} \quad B = y''(x_w + \varepsilon)$$

bei betragsmäßig hinreichend kleinem ε .

2.1.2. Lösungsansätze

Es sollen hier die Möglichkeiten diskutiert werden, die sich durch Polynomansätze beliebiger Ordnung \mathbb{R} ergeben.

Es sei das Ziel gesetzt, zu untersuchen, ob die Koeffizienten des Ansatzes

$$y = \vec{a}^T \cdot \vec{x} \quad (1)$$

mit $\vec{a}^T = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{\emptyset R})$

und $\vec{x}^T = (1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{\emptyset R})$

in einer für den Entwurfsprozess geeigneten Weise bestimmbar sind.

2.1.2.1. Koeffizientenbestimmung ohne Standardvorgaben

In diesem Falle ist der Koeffizientenvektor des Ansatzes (1) unter den im Abschnitt 2.1.1. genannten Voraussetzungen zu ermitteln.

Die geometrischen Vorgaben können beliebigen Kurvenpunkten zugeordnet sein.

Ausgewählte Beispiele siehe Tafel 2 sowie Bilder 1 und 4 bis 15. Zu beachten ist auch Tafel 1.

Ferner sei vereinbart:

Gesamtanzahl der geometrischen Bedingungen

$$r = n_p + n_t + n_{kr}$$

Die Anzahl u der zu bestimmenden Koeffizienten ergibt sich zu

$$u = \emptyset R + 1$$

Im Falle $n \geq (u - r)$ benutzen wir die Ausgleichsrechnung.

Gilt $n = (u - r)$, so handelt es sich um den zugelassenen Sonderfall $\vec{v}^T \underline{P} \vec{v} = 0$.

\vec{v} und \underline{P} werden im folgenden Text erläutert. Bei $n = 0 \wedge u = r$ lösen wir das entsprechende Gleichungssystem direkt auf. Die Relation $n > (u - r)$ erfordert die Anwendung der Variante "Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Nebenbedingungen" (siehe [10], S. 140).

Zur Vorbereitung eines variablen Aufbaus des notwendigen Gleichungssystems vereinbaren wir die aus Tafel 1 ersichtlichen Kennzahlen, deren Verwendung im Abschnitt 5 erläutert wird.

Aus den Stützpunkten S_j ergibt sich das System der umgeformten Verbesserungsgleichungen:

$$\vec{v}_{n,1} = \underline{A}_{n,u} \cdot \vec{\Delta x}_{u,1} - \vec{l}_{n,1} \quad (2)$$

mit

$$\vec{v}_{1,n}^T = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \quad (3)$$

$$\underline{A}_{n,u} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{\emptyset R} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{\emptyset R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{\emptyset R} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{\Delta x}_{1,u}^T = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{\emptyset R}) \quad (5)$$

$$-\vec{l}_{1,n}^T = (-y_1 \ -y_2 \ \dots \ -y_n) \quad (6)$$

Zugelassen ist ferner die Diagonalmatrix $\underline{P}_{n,n}$ der Gewichte der Beobachtungen /gemessene Stützpunkte/.

Das System der umgeformten Bedingungsgleichungen, entstanden aus den geometrischen Vorgaben, lässt sich nach Typen ordnen und so zusammenfassen:

$$\underline{BE}_{r,u} \cdot \vec{\Delta x}_{u,1} + w \vec{l}_{r,1} = 0 \quad (7)$$

wobei

$$\underline{\underline{BE}}_{r,u} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{\emptyset R} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{\emptyset R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{np} & x_{np}^2 & x_{np}^3 & \dots & x_{np}^{\emptyset R} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \dots & \emptyset R \cdot x_1^{\emptyset R-1} \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & \dots & \emptyset R \cdot x_2^{\emptyset R-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2x_{nt} & 3x_{nt}^2 & \dots & \emptyset R \cdot x_{nt}^{\emptyset R-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 & \dots & \emptyset R \cdot (\emptyset R-1) \cdot x_1^{\emptyset R-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_2 & \dots & \emptyset R \cdot (\emptyset R-1) \cdot x_2^{\emptyset R-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{nkr} & \dots & \emptyset R \cdot (\emptyset R-1) \cdot x_{nkr}^{\emptyset R-2} \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\underline{wi}}_{r,l} = \begin{pmatrix} -Y_1 \\ -Y_2 \\ \vdots \\ -Y_{np} \\ -T_1 \\ -T_2 \\ \vdots \\ -T_{nt} \\ -KR_1 \cdot (1 + T_1^2)^{3/2} \\ -KR_2 \cdot (1 + T_2^2)^{3/2} \\ \vdots \\ -KR_{nkr} \cdot (1 + T_{nkr}^2)^{3/2} \end{pmatrix}$$

(2) und (7) genügen, um das Problem im Sinne der "Methode der kleinsten Quadrate" zu lösen, siehe [11] und [12].

Als Ergebnis erhalten wir die gesuchten Koeffizienten, welche unter den erwähnten Nebenbedingungen die Forderung

$$\vec{v}^T \underline{P} \vec{v} \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

befriedigen.

2.1.2.2. Koeffizientenbestimmung im Falle der Standardvorgaben Anfangspunkt, horizontale Anfangstangente und Anfangskrümmung

Durch Koordinatentransformation lässt sich gewährleisten, dass Anfangsabszisse $x_0 = 0$ gilt.

Fordert man weiter /siehe Bilder 2 und 16 bis 22/

$$y(0) = y_0 \wedge y'(0) = 0 \wedge y''(0) = KR_0 ,$$

so sind damit bereits 3 Koeffizienten des Ansatzes (1) vergeben:

$$(a_0 \quad a_1 \quad a_2) = (y_0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} KR_0)$$

Im folgenden bezeichnen wir die Vorgaben im Anfangspunkt P_0 mit "Standardvorgaben". Gemessen seien wiederum die Stützpunkte S_j . Ausserdem sollen noch weitere geometrische Forderungen, sog. "Zusatzvorgaben", für alle Punkte $P \neq P_0$ gemäss Abschnitt 2.1.1. zugelassen sein.

Diese Stützpunkte und Zusatzvorgaben werden nun zur Bestimmung der noch verbleibenden Unbekannten $(a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_{\phi R})$

verwendet. Die Anzahl der verbliebenen Unbekannten ergibt sich zu $u_{\text{red}} = (\phi R + 1) - 3$.

Aus den Stützpunkten S_j folgt wieder das System der umgeformten Verbesserungsgleichungen

$$\vec{v}_{n,1} = \underline{A}_{n,u_{\text{red}}} \cdot \vec{dx}_{u_{\text{red}},1} - \vec{I}_{n,1} \quad (8)$$

$$\underline{A}_{n,u_{\text{red}}} = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^4 & \dots & x_1^{\emptyset R} \\ x_2^3 & x_2^4 & \dots & x_2^{\emptyset R} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^3 & x_n^4 & \dots & x_n^{\emptyset R} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{dx}_{1,u_{\text{red}}}^T = (a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_{\emptyset R}) \quad (10)$$

$$-\vec{f}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

Bezüglich der geometrischen Vorgaben stellen wir erneut das System der umgeformten Bedingungsgleichungen auf:

$$\underline{BE}_{r,u_{\text{red}}} \cdot \vec{dx}_{u_{\text{red}}}^T + \vec{w}_{r,1} = 0 \quad (12)$$

$$\text{mit } \vec{w}_{r,1} = \underline{C}_{r,3} \cdot \vec{c}_{3,1} + \vec{d}_{r,1} \quad (13)$$

$$\text{wobei } \vec{c}_{1,3}^T = (a_0 \quad a_1 \quad a_2) \quad (14)$$

und

$\underline{BE}_{r,u_{red}} =$

$$\begin{pmatrix}
 x_1^3 & x_1^4 & \dots & x_1^{\emptyset R} \\
 x_2^3 & x_2^4 & \dots & x_2^{\emptyset R} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_{np}^3 & x_{np}^4 & \dots & x_{np}^{\emptyset R} \\
 3x_1^2 & 4x_1^3 & \dots & \emptyset R x_1^{\emptyset R-1} \\
 3x_2^2 & 4x_2^3 & \dots & \emptyset R x_2^{\emptyset R-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 3x_{nt}^2 & 4x_{nt}^3 & \dots & \emptyset R x_{nt}^{\emptyset R-1} \\
 6x_1 & 12x_1^2 & \dots & \emptyset R(\emptyset R-1) x_1^{\emptyset R-2} \\
 6x_2 & 12x_2^2 & \dots & \emptyset R(\emptyset R-1) x_2^{\emptyset R-2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 6x_{nkr} & 12x_{nkr}^2 & \dots & \emptyset R \emptyset R-1 x_{nkr}^{\emptyset R-2}
 \end{pmatrix} \quad (15)$$

 $\underline{C}_{r,3} =$

$$\begin{pmatrix}
 1 & x_1 & x_1^2 \\
 1 & x_2 & x_2^2 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 1 & x_{np} & x_{np}^2 \\
 0 & 1 & 2x_1 \\
 0 & 1 & 2x_2 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 0 & 1 & 2x_{nt} \\
 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 2 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 2
 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\vec{d}_{r,1} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_{np} \\ -T_1 \\ -T_2 \\ \vdots \\ -T_{nt} \\ -(KR_1 \cdot (1 + T_1^2)^{3/2}) \\ -(KR_2 \cdot (1 + T_2^2)^{3/2}) \\ \dots \\ -(KR_{nkr} \cdot (1 + T_{nkr}^2)^{3/2}) \end{pmatrix} \quad (17)$$

(8) und (12) genügen wiederum zur Ermittlung der Unbekannten.

2.1.2.3. Koeffizientenbestimmung im Falle der Standardvorgaben Anfangspunkt, horizontale Anfangstangente, Anfangs- krümmung und Anstieg der Affinnormalen im Anfangspunkt

Zunächst gehen wir von einer Kurve mit Vorgaben gemäss 2.1.2.2. aus. Darüber hinaus fordern wir, dass im Intervall $[x_1, 0]$, siehe Bild 3, eine Kurve angefügt werden soll, die zur erstgenannten Kurve im Intervall $[0, x_e]$ asymmetrisch ist. Prinzipiell lässt sich diese Aufgabe in guter Näherung /Berührung 4. Ordnung/ durch Vorgabe des Anstiegs der Affinnormalen lösen.

Bezüglich der praktischen Handhabung des Hilfsmittels Affinnormale siehe Abschnitt 6. Der Anstieg der Affinnormalen ergibt sich nach Abschnitt 1 zu:

$$m_A = \frac{y' y''' - 3y''^2}{y'''} \rightarrow m_A(0) = - \frac{3y''^2(0)}{y'''} \quad (\text{wegen } y'(0) = 0)$$

$$\text{mithin} \quad y'''(0) = - \frac{3y''^2(0)}{m_A(0)}$$

Wie sich leicht nachprüfen lässt, sind damit die Koeffizienten

$$a_i \quad i = 0, 1, 2, 3$$

des Ansatzes (1) festgelegt:

$$(a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3) = (y_a \ 0 \ \frac{KR_0}{2} \ - \frac{KR_0^2}{2m_A(0)})$$

Anzahl der verbleibenden Unbekannten:

$$u_{\text{red}} = (\emptyset R + 1) - 4$$

Analog zu 2.1.2.2. gelten prinzipiell die Gleichungssysteme (8) und (12), jedoch diesmal mit nachstehender Bedeutung:

$$\underline{A}_{n, u_{\text{red}}} = \begin{pmatrix} x_1^4 & x_1^5 & \dots & x_1^{\emptyset R} \\ x_2^4 & x_2^5 & \dots & x_2^{\emptyset R} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^4 & x_n^5 & \dots & x_n^{\emptyset R} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\vec{dx}_{1, u_{\text{red}}}^T = (a_4 \ a_5 \ \dots \ a_{\emptyset R}) \quad (19)$$

$$-\vec{I}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\vec{w}_{r,1} = \underline{C}_{r,4} \cdot \vec{c}_{4,1} + \vec{d}_{r,1} \quad (21)$$

$$\vec{c}_{4,1}^T = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3) \quad (22)$$

$$\underline{BE}_{r,u_{red}} = \begin{pmatrix} x_1^4 & x_1^5 & \dots & x_1^{\emptyset R} \\ x_2^4 & x_2^5 & \dots & x_2^{\emptyset R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{np}^4 & x_{np}^5 & \dots & x_{np}^{\emptyset R} \\ 4x_1^3 & 5x_1^4 & \dots & \emptyset R \cdot x_1^{\emptyset R-1} \\ 4x_2^3 & 5x_2^4 & \dots & \emptyset R \cdot x_2^{\emptyset R-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4x_{nt}^3 & 5x_{nt}^4 & \dots & \emptyset R \cdot x_{nt}^{\emptyset R-1} \\ 12x_1^2 & 20x_1^3 & \dots & \emptyset R(\emptyset R-1) \cdot x_1^{\emptyset R-2} \\ 12x_2^2 & 20x_2^3 & \dots & \emptyset R(\emptyset R-1) \cdot x_2^{\emptyset R-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 12x_{nkr}^2 & 20x_{nkr}^3 & \dots & \emptyset R(\emptyset R-1) \cdot x_{nkr}^{\emptyset R-2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$C_{r,4} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{np} & x_{np}^2 & x_{np}^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2x_{nt} & 3x_{nt}^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{nkr} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$\vec{d}_{r,1}$ - siehe (17)

2.1.2.4. Erzeugen axialsymmetrischer Teilkurven

Trivialerweise gilt für die Spiegelung einer gemäss 2.1.2.1. oder 2.1.2.2. erzeugten Kurve an der y-Achse:

$$f(x) = f(-x)$$

Ebenso leicht ist die rechentechnische Realisierung, siehe Abschnitt 5.

2.1.3. Wertigkeit der Messdaten und Vorgaben für die Bestimmung der Koeffizienten der Kurve

Den Messdaten können in Abhängigkeit von der Messgenauigkeit Gewichte zugeordnet werden. Ebenso kann ein hohes Gewicht willkürlich vorgegeben werden, womit nahezu ein Festhalten des gemessenen Stützpunktes erreicht wird /Präzisierung dieses Sachverhaltes, siehe Abschnitt 5/.

Bestenfalls kann ein gemessener Stützpunkt eine Fixpunktbedingung ersetzen, woraus sich die Wertigkeit $W \leq 1$ für einen Stützpunkt ableitet.

Fixpunkt-, Tangenten-, Krümmungs- und Affinnormalenbedingungen sowie Kombinationen dieser Vorgaben /Maxima, Minima, Wendepunkte/ erhalten die Wertigkeit $W \geq 1$. Die Wertigkeit einer Vorgabe ist gleich der Anzahl der durch die Vorgabe bzw. Vorgabenkombination festgelegten Bedingungsgleichungen und somit ebenfalls gleich der Anzahl der festgelegten Koeffizienten vor (1).

In Tafel 1 sind die Wertigkeiten für Stützpunkte und Vorgaben aufgeführt.

Beispiele für ausgewählte Kombinationen von Stützpunkten und Vorgaben nebst Gesamtwertigkeiten sind für $n \geq (u_{\text{red}} - r)$ in Tafel 2 zusammengestellt.

Zu $n > (u_{\text{red}} - r)$	siehe Bilder 1 bis 3,
bei $n = (u_{\text{red}} - r)$	siehe Bilder 4 bis 26.

2.2. Entwurf von Drehflächen

Liegt eine nach 2.1.1. konstruierte ebene Kurve vor, so ist der Übergang zur Rotationsfläche einschliesslich digitalgrafischer Darstellung /siehe Abschnitt 5/ trivial.

$$y = f(x)$$

wird nunmehr als

$$r = f(z)$$

interpretiert, wobei

$$\left. \begin{array}{l} r - \text{Radius} \\ z - \text{Höhe} \end{array} \right\} \text{ der Drehfläche } \mathcal{D}$$

Siehe Bild 27.

Es gilt:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cdot f(z) \\ \sin \rho \cdot f(z) \\ z \end{pmatrix} \quad (25)$$

Aus Bild 27 geht ebenfalls die Gebietseinteilung der Drehfläche nach elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Punkten hervor.

2.3. Entwurf von Flächen in der Darstellung $z = f(x, y)$

Nach der Vorbetrachtung zum Entwurf ebener Kurven gelingt die Erweiterung auf den Entwurf von Flächen in der Darstellungsform $z = f(x, y)$ auf einfache Weise.

2.3.1. Lösungsansätze

Je nach Verwendungszweck kann der Konstrukteur eine noch zu spezifizierende Anzahl von Erzeugenden- und Leitkurven vorgeben. Die Erzeugenden-Kurven liegen in x bzw. u -Richtung und die Leitkurven in y bzw. v -Richtung. Deshalb verwenden wir im folgenden auch die abkürzenden Bezeichnungen "u-Kurven" und "v-Kurven".

Die Kurven werden nach dem unter 2.1.2. erläuterten Prinzip bereitgestellt.

Zur Flächenerzeugung aus Erzeugenden- und Leitkurven seien folgende Ansätze betrachtet: Im trivialen Fall "Schiebfläche" /2.3.1.1./ - je eine Erzeugende- und Leitkurve /Bild 28/ - soll die Erzeugende-Kurve entlang der Leitkurve in y-Richtung bewegt werden.

Im Falle von zwei Erzeugenden- und einer Leitkurve gemäss 2.3.1.2. und Bild 29 wird die erste Erzeugende-Kurve /zugehörige Funktion: $z = f(x)$ / beim Verschieben in y-Richtung entlang der Leitkurve geometrisch so verändert, dass sie beim Erreichen des Endpunktes der Leitlinie mit der zweiten Erzeugenden-Kurve /zugehörige Funktion $z = h(x)$ / identisch ist. In beiden Fällen entsteht eine Fläche

$$z = f(x, y) = m_0(y) + m_1(y) \cdot x + m_2(y) x^2 + \dots + m_{\emptyset R}(y) \cdot x^{\emptyset R}$$

Setzen wir $y = y_1$, so erhalten wir die entsprechende Zwischenkurve der Fläche $z = f(x, y)$ in x-Richtung.

Ersichtlich sind die Koeffizienten m_i $i = 0, 1, 2, \dots, \emptyset R$ Funktionen von y . Da die Funktionen $m_i(y)$ die Bewegung bzw. Veränderung der Erzeugenden-Kurve /zugehörige Funktion $z = f(x)$ / entlang der Leitlinie beim Vorwärtsschreiten in y-Richtung beschreiben, wollen wir sie "Bewegungsfunktionen" nennen. Aus den Abschnitten 2.3.1.1. und 2.3.1.2. sind die entsprechenden Bewegungsfunktionen leicht zu entnehmen.

So ergibt sich aus (30) und (31) für den trivialen Fall:

$$m_0(y) = f_0 + g_1 y + g_2 y^2 + \dots + g_{\emptyset R} y^{\emptyset R}$$

$$m_1(y) = f_1$$

$$m_2(y) = f_2$$

$$\dots$$

$$m_{\emptyset R}(y) = f_{\emptyset R}$$

Mithin ist in diesem Sonderfall lediglich das Absolutglied m_0 eine Funktion von y .

Aus (37) und (38) ist für den anderen erwähnten Fall abzulesen:

$$m_0(y) = f_0 + g_1 y + g_2 y^2 + \dots + g_{\emptyset R} y^{\emptyset R}$$

$$m_1(y) = f_1 + (h_1 - f_1) \cdot y$$

$$m_2(y) = f_2 + (h_2 - f_2) \cdot y$$

$$\dots \dots \dots$$

$$m_{\emptyset R}(y) = f_{\emptyset R} + (h_{\emptyset R} - f_{\emptyset R}) \cdot y$$

Gehen wir nun auf die Fälle 2.3.1.3.

/Je zwei Erzeugende- und Leitkurven, Bild 30/ und 2.3.1.4.

/Eine Schar von Erzeugenden-Kurven und zwei Leitkurven, Bild 31/ über, so können wir zwar prinzipiell wieder von einer Zwischenkurve in x- bzw. u-Richtung ausgehen, müssen uns aber die Bewegungsfunktionen auf einem Umweg beschaffen.

Wir bestimmen zunächst die Koeffizienten von Funktionen, die hier als "Randfunktionen" deklariert seien. Diese Randfunktionen schreiben vor, wie sich im Anfangs- und Endpunkt der Zwischenkurve /in x- bzw. u-Richtung/ Funktionswert und Ableitungen beliebiger Ordnung beim Fortschreiten in y- bzw. v-Richtung ändern sollen. Solche Vorgaben entsprechen dem angestrebten Ansatzverfahren /siehe Abschnitt 1/.

Die Randfunktionen $v_{00}(v)$, f_1 , f_2 , ..., f_0 fixieren in der angegebenen Reihenfolge Funktionswert, 1. Ableitung in u-Richtung, 2. Ableitung in u-Richtung, ..., σ . Ableitung in u-Richtung jeweils im Anfangspunkt der Zwischenkurve, während die Randfunktionen $v_{10}(v)$, g_1 , g_2 , ..., g_0 analog für den Endpunkt der Zwischenkurve gelten. Zu σ und ρ siehe (44) und (45). Aus den Koeffizienten der Randfunktionen, welche leicht aus den Koeffizienten der Funktionen zu den vorausgesetzten Erzeugenden-Kurven abgeleitet werden können, gewinnen wir durch Auflösung des jeweilig entstehenden Systems von Bestimmungsgleichungen die gesuchten Koeffizienten der "Bewegungsfunktionen",

siehe (57). Damit ist die Zwischenkurve in u-Richtung als Funktion von v festgelegt (58).

Der Übergang von der Zwischenkurven- zur Flächendarstellung ist durch eine einfache Umformung (59) zu realisieren.

Es sei hier darauf hingewiesen, dass weder die "Bewegungs-" noch die "Randfunktionen" den COONSSchen "Mischungs- oder Gewichtsfunktionen" /siehe [14] / entsprechen.

Eine Rechtfertigung der gewählten Ansätze ergibt sich aus einer entsprechenden Diskussion im Abschnitt 6.

2.3.1.1. Zwei vorgegebene Stützkurven: Eine Erzeugende- und eine Leitkurve

Vorgegeben seien die Kurven /siehe Bild 28/:

$$z_1 = f(x) = \vec{f}^T \cdot \vec{x} \quad (26)$$

$$z_2 = g(y) = \vec{g}^T \cdot \vec{y} \quad (27)$$

wobei

$$\vec{f}^T = (f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{\emptyset R})$$

$$\vec{g}^T = (0 \quad g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_{\emptyset R}) \quad (28)$$

$$\vec{x}^T = (1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^{\emptyset R})$$

$$\vec{y}^T = (1 \quad y \quad y^2 \quad \dots \quad y^{\emptyset R})$$

Es soll nun die erwähnte "Schiebfläche" erzeugt werden:

$$z = z(x, y) = \vec{f}^T \cdot \vec{x} + \vec{g}^T \cdot \vec{y} \quad (29)$$

Oder umgeformt:

$$z \doteq z(x, y) = \vec{x}_{1, \emptyset R+1}^T \cdot \underline{z}_{\emptyset R+1, \emptyset R+1} \cdot \vec{y}_{\emptyset R+1, 1} \quad (30)$$

mit

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} f_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{\emptyset R} \\ f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{\emptyset R} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Ersichtlich beschreibt

$$z(0, y) = f_0(y) = f_0 + \vec{g}^T \cdot \vec{y}$$

die Änderung des Absolutgliedes der in y-Richtung bewegten Erzeugenden-Kurve.

2.3.1.2. Drei vorgegebene Stützkurven: Zwei Erzeugende- und eine Leitkurve

Zusätzlich zu den Kurven z_1 und z_2 , (26) und (27), sei eine dritte Kurve gegeben /siehe Bild 29/:

$$z_3 = h(x) = \vec{h}^T \cdot \vec{x} \quad (32)$$

$$\text{mit } \vec{h}^T = (h_0 \quad h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_{\emptyset R}) \quad (33)$$

Um eine Fläche zu erzeugen, sei postuliert:

$$z = z(x, y) = \vec{m}^T \cdot \vec{x} \quad (34)$$

wobei

$$\vec{m}^T = (m_0(y) \quad m_1(y) \quad m_2(y) \quad \dots \quad m_{\emptyset R}(y))$$

Ferner gelte:

$$m_o(y) = z(o, y) = f_o + \vec{g}^T \cdot \vec{y}$$

$$m_i(y) = (k_i)_o + (k_i)_1 \cdot y \quad (35)$$

Zu bestimmen sind somit die Koeffizienten:

$$(k_i)_j \quad i = 1, 2, \dots, \emptyset R \quad j = 0, 1$$

Die Unbekannten ergeben sich nach Auflösung des Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & y_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (k_i)_o \\ (k_i)_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_i(o) \\ m_i(y_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ h_i \end{pmatrix}$$

Im Falle der Normierung $y_e = 1$ folgt:

$$\begin{pmatrix} (k_i)_o \\ (k_i)_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ h_i - f_i \end{pmatrix} \quad (36)$$

Mit (35) und (36) lässt sich (34) umformen zu:

$$z = z(x, y) = \vec{x}_{1, \emptyset R+1}^T \cdot \underline{D}_{\emptyset R+1, \emptyset R+1} \cdot \vec{y}_{\emptyset R+1, 1} \quad (37)$$

mit

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} f_o & g_1 & g_2 & \dots & g_{\emptyset R} \\ f_1 & (h_1 - f_1) & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & (h_2 - f_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{\emptyset R} & (h_{\emptyset R} - f_{\emptyset R}) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

2.3.1.3. Vier vorgegebene Stützkurven: Je zwei Erzeugende- und Leitkurven

Vorgegeben seien vier Randkurven einer zu erzeugenden Fläche über normiertem, quadratischem Grundriss.

Zur Vorbereitung des Abschnittes 2.4 erscheint es zweckmässig, die Koordinatenachsen in der in Bild 30 angegebenen Weise zu bezeichnen. Daraus folgt die Notation der Randkurven:

$$\begin{aligned}
 u_{00}(u) &= \vec{u}_{00}^T \cdot \vec{u} \\
 u_{01}(u) &= \vec{u}_{01}^T \cdot \vec{u} \\
 v_{00}(v) &= \vec{v}_{00}^T \cdot \vec{v} \\
 v_{10}(v) &= \vec{v}_{10}^T \cdot \vec{v}
 \end{aligned} \tag{39}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_{00}^T &= (u_{000} \quad u_{001} \quad u_{002} \quad \dots \quad u_{00\phi_R}) \\
 \vec{u}_{01}^T &= (u_{010} \quad u_{011} \quad u_{012} \quad \dots \quad u_{01\phi_R}) \\
 \vec{v}_{00}^T &= (v_{000} \quad v_{001} \quad v_{002} \quad \dots \quad v_{00\phi_R}) \\
 \vec{v}_{10}^T &= (v_{100} \quad v_{101} \quad v_{102} \quad \dots \quad v_{10\phi_R})
 \end{aligned} \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned}
 \vec{u}^T &= (1 \quad u \quad u^2 \quad \dots \quad u^{\phi_R}) \\
 \vec{v}^T &= (1 \quad v \quad v^2 \quad \dots \quad v^{\phi_R})
 \end{aligned} \tag{41}$$

Ein Lösungsweg zur Flächendarstellung führt über den "Zwischenkurvenansatz": Zu ermitteln seien die Koeffizienten der Zwischenkurve

$$u_{OV}(u) = \vec{u}_{OV}^T \cdot \vec{u}$$

mit

(42)

$$u_{ov}^T = (u_{ov_0} \quad u_{ov_1} \quad u_{ov_2} \quad \dots \quad u_{ov_{|R|}})$$

Benötigt werden $u = (\varnothing R + 1)$ Bestimmungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} v_{00}(v) &= u_{ov}(o) \\ v_{10}(v) &= u_{ov}(1) \\ f_1(v, \frac{\partial(u_{00}(o))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{01}(o))}{\partial u}) &= \frac{\partial(u_{ov}(o))}{\partial u} \\ f_2(v, \frac{\partial^2(u_{00}(o))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{01}(o))}{\partial u^2}) &= \frac{\partial^2(u_{ov}(o))}{\partial u^2} \\ . &. \\ f_\sigma(v, \frac{\partial^\sigma(u_{00}(o))}{\partial u^\sigma}, \frac{\partial^\sigma(u_{01}(o))}{\partial u^\sigma}) &= \frac{\partial^\sigma(u_{ov}(o))}{\partial u^\sigma} \\ g_1(v, \frac{\partial(u_{00}(1))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{01}(1))}{\partial u}) &= \frac{\partial(u_{ov}(1))}{\partial u} \\ g_2(v, \frac{\partial^2(u_{00}(1))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{01}(1))}{\partial u^2}) &= \frac{\partial^2(u_{ov}(1))}{\partial u^2} \\ . &. \\ g_\rho(v, \frac{\partial^\rho(u_{00}(1))}{\partial u^\rho}, \frac{\partial^\rho(u_{01}(1))}{\partial u^\rho}) &= \frac{\partial^\rho(u_{ov}(1))}{\partial u^\rho} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

wobei sich σ und ρ mit Fallunterscheidung so ergeben:

$$\begin{aligned} \text{Fall } \quad \emptyset R &= 2 m_1 + 1 & m_1 &= 0, 1, 2, \dots, p \\ \sigma &= \frac{1}{2}(\emptyset R - 1) & & \\ \rho &= \sigma & & \end{aligned} \quad (44)$$

Fall $\emptyset R = 2 m_2$

$$m_2 = 1, 2, \dots, p$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \emptyset R$$

(45)

$$\rho = \sigma - 1$$

p : natürliche Zahl

(43) umgeformt:

$$\underline{K}_{u,u} \cdot \vec{v}_{u,1} = \underline{G}_{u,u} \cdot (\vec{u}_{ov})_{u,1} \quad (46)$$

wobei

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \vec{v}_{00}^T \\ \vec{v}_{10}^T \\ \vec{f}_1^T \\ \vec{f}_2^T \\ \vec{f}_3^T \\ \vdots \\ \vec{f}_{\sigma-2}^T \\ \vec{f}_{\sigma-1}^T \\ \vec{f}_{\sigma}^T \\ \vec{g}_1^T \\ \vec{g}_2^T \\ \vec{g}_3^T \\ \vdots \\ \vec{g}_{\rho-2}^T \\ \vec{g}_{\rho-1}^T \\ \vec{g}_{\rho}^T \end{pmatrix} \quad (47)$$

mit

$$\vec{f}_i^T = (f_{i0} \quad f_{i1} \quad f_{i2} \quad \dots \quad f_{i\varrho_R}) \quad (48)$$

$$\vec{g}_j^T = (g_{j0} \quad g_{j1} \quad g_{j2} \quad \dots \quad g_{j\varrho_R}) \quad (49)$$

und

$$i = 1, 2, \dots, \sigma \quad (50)$$

$$j = 1, 2, \dots, \rho \quad (51)$$

weiter gilt für $\sigma = \rho$:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1^T \\ \vec{c}_2^T \\ \vec{d}_1^T \\ \vec{d}_2^T \\ \vec{d}_3^T \\ \vdots \\ \vec{d}_{\sigma-2}^T \\ \vec{d}_{\sigma-1}^T \\ \vec{d}_{\sigma}^T \\ \vec{e}_1^T \\ \vec{e}_2^T \\ \vec{e}_3^T \\ \vdots \\ \vec{e}_{\rho-2}^T \\ \vec{e}_{\rho-1}^T \\ \vec{e}_{\rho}^T \end{pmatrix} \quad (52)$$

mit $\vec{c}_1^T = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

$c_2^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1)$

$\vec{d}_1^T = (0 \ 1! \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

$\vec{d}_2^T = (0 \ 0 \ 2! \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

$\vec{d}_3^T = (0 \ 0 \ 0 \ 3! \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

.

.

$\vec{d}_{\sigma-2}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots (\sigma-2)! \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

$\vec{d}_{\sigma-1}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ (\sigma-1)! \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

$\vec{d}_{\sigma}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \sigma! \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

$\vec{e}_1 =$

0

$\frac{1!}{(1-1)!}$

$\frac{2!}{(2-1)!}$

$\frac{3!}{(3-1)!}$

.

.

.

$\frac{(\sigma-2)!}{((\sigma-2)-1)!}$

$\frac{(\sigma-1)!}{((\sigma-1)-1)!}$

$\frac{\sigma!}{(\sigma-1)!}$

$\frac{(\sigma+1)!}{((\sigma+1)-1)!}$

.

.

$\frac{(\emptyset R-1)!}{((\emptyset R-1)-1)!}$

$\frac{\emptyset R!}{(\emptyset R-1)!}$

$$\vec{e}_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{2!}{(2-2)!} \\ \frac{3!}{(3-2)!} \\ \vdots \\ \frac{(\sigma-2)!}{((\sigma-2)-2)!} \\ \frac{(\sigma-1)!}{((\sigma-1)-2)!} \\ \frac{\sigma!}{(\sigma-2)!} \\ \frac{(\sigma+1)!}{((\sigma+1)-2)!} \\ \vdots \\ \frac{(\emptyset R-1)!}{((\emptyset R-1)-2)!} \\ \frac{\emptyset R!}{(\emptyset R-2)!} \end{array} \right)$$

$$\vec{e}_3 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3!}{(3-3)!} \\ \vdots \\ \frac{(\sigma-2)!}{((\sigma-2)-3)!} \\ \frac{(\sigma-1)!}{((\sigma-1)-3)!} \\ \frac{\sigma!}{(\sigma-3)!} \\ \frac{(\sigma+1)!}{((\sigma+1)-3)!} \\ \vdots \\ \frac{(\emptyset R-1)!}{((\emptyset R-1)-3)!} \\ \frac{\emptyset R!}{(\emptyset R-3)!} \end{array} \right)$$

$$\vec{e}_{\rho-2} = \left(\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \frac{(\rho-2)!}{((\rho-2)-(\rho-2))!} \\
 \frac{(\rho-1)!}{((\rho-1)-(\rho-2))!} \\
 \frac{\rho!}{(\rho-(\rho-2))!} \\
 \frac{(\rho+1)!}{((\rho+1)-(\rho-2))!} \\
 \vdots \\
 \frac{(\emptyset R-1)!}{((\emptyset R-1)-(\rho-2))!} \\
 \frac{\emptyset R!}{((\emptyset R-(\rho-2))!}
 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix}
 \frac{i((1-d)-(d-1))}{i^{d+1}} \\
 \frac{i((1-d)-(d-1))}{i^d} \\
 \frac{i((d+1)-(d-1))}{i^{d+1}} \\
 \vdots \\
 \frac{i((d-1)-(d-1))}{i^{d-1}} \\
 \frac{i((d-1)-(d-1))}{i^{d-1}}
 \end{pmatrix} = {}^{d-1} \omega_1$$

$\vec{e}_\rho =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\rho!}{(\rho-\rho)!} \\ \frac{(\rho+1)!}{((\rho+1)-\rho)!} \\ \vdots \\ \frac{(\emptyset R-1)!}{((\emptyset R-1)-\rho)!} \\ \frac{\emptyset R!}{(\emptyset R-\rho)!} \end{pmatrix}$$

Aus der ausführlichen Darstellung der Zeilenvektoren von \underline{G} (52) ist Spaltennumerierung von \underline{G} erkennbar.

Der Spaltenindex k durchläuft folgende INTEGER-Größen:

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, \sigma-2, \sigma-1, \sigma, \sigma+1, \dots, \emptyset R-1, \emptyset R$$

bzw.

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, \rho-2, \rho-1, \rho, \rho+1, \dots, \emptyset R-1, \emptyset R$$

Obige Darstellung ermöglicht einen dynamischen Aufbau von \underline{G} bei beliebig vorgegebbarer Ordnung $\emptyset R$.

Zweckmässigerweise sei sofort in ALGØL 60-Schreibweise vereinbart bzw. notiert:

<u>ARRAY</u> G [0 : ØR, 0 : ØR] ;	}	(53)
<u>FØR</u> I: = 0 <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> ØR <u>DØ</u>		
<u>FØR</u> K: = 0 <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> ØR <u>DØ</u>		
G [I, K]: = 0;		
G [0, 0]: = 1;		
<u>FØR</u> K: = 0 <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> ØR <u>DØ</u>		
G [1, K]: = 1;		
<u>FØR</u> I: = 2 <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> SIGMA + 1 <u>DØ</u>		
G [I, I-1]: = FAKULTAET (I - 1);		
<u>FØR</u> I: = SIMA + 2 <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> ØR <u>DØ</u>		
<u>FØR</u> K: = I - (SIGMA + 1) <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> ØR <u>DØ</u>		
G [I, K]: = FAKULTAET (K) / FAKULTAET (K - I + SIGMA + 1);		

bei Benutzung der

PRØCEDURE FAKULTAET /formaler Parameter/;

zum Algorithmus (53) sei ein Trockentest demonstriert:

$$\text{Er sei } \quad \varnothing R = 7 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma = 3 \\ \rho = 3 \end{array} \right\}, \quad \underline{G}_{8,8}$$

ARRAY G [0 : 7, 0 : 7]

Spalte	0	1	2	3	4	5	6	7
Zeile								
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	2	0	0	0	0	0
4	0	0	0	3	0	0	0	0
5	0	1	2	3	4	5	6	7
6	0	0	2	6	12	20	30	42
7	0	0	0	6	24	60	120	210

Zur Bestimmung der Koeffizienten der gesuchten Zwischenkurve u_{ov} ist noch \underline{K} bereitzustellen.

Wir verfügen in folgender Weise über

\vec{f}_i^T und \vec{g}_j^T (siehe (48) und (49)):

$$f_{i_1} = g_{j_1} = 0 \quad l = 2, 3, \dots, \phi R \quad (54)$$

sowie analog zu (36)

$$\begin{pmatrix} f_{i_0} \\ f_{i_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^i(u_{00}(0))}{\partial u^i} \\ \frac{\partial^i(u_{01}(0))}{\partial u^i} - \frac{\partial^i(u_{00}(0))}{\partial u^i} \end{pmatrix} \quad (55)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} g_{j_0} \\ g_{j_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^j(u_{00}(1))}{\partial u^j} \\ \frac{\partial^j(u_{01}(1))}{\partial u^j} - \frac{\partial^j(u_{00}(1))}{\partial u^j} \end{pmatrix} \quad (56)$$

Nunmehr lässt sich (46) nach \vec{u}_{ov} auflösen:

$$(\vec{u}_{ov})_{u,1} = \underline{G}_{u,u}^{-1} \cdot \underline{K}_{u,u} \cdot \vec{v}_{u,1} \quad (57)$$

Damit erhalten wir die Darstellung der gesuchten Zwischenkurve zu:

$$u_{ov}(u) = \vec{u}_{ov}^T \cdot \vec{u} \quad (58)$$

Mit der Abkürzung

$$\underline{V}_{u,u} = \underline{G}_{u,u}^{-1} \cdot \underline{K}_{u,u}$$

ergibt sich eine (30) und (37) entsprechende Form für die Flächendarstellung:

$$F(u,v) = \vec{u}_{1,u}^T \cdot \underline{V}_{u,u} \cdot \vec{v}_{u,1} \quad (59)$$

2.3.1.4. Mehr als vier vorgegebene Stützkurven: Eine Schar von Erzeugenden-Kurven und zwei Leitkurven

Zusätzlich zu den im Abschnitt 2.3.1.3. vorausgesetzten Kurven sollen nun zusätzliche Erzeugende-Kurven zugelassen werden. Dazu kürzen wir ab:

nus - Gesamtanzahl der Erzeugenden-Kurven in u-Richtung
("u-Kurven")

$$l = nus - 2$$

(Anzahl der Zusatz- "u-Kurven")

Abgespeichert werden die Koeffizienten der nus-"u-Kurven" in einer Matrix

$$\underline{U}_{u,nus} = (\vec{u}_{00} \quad \vec{u}_{ov_1} \quad \vec{u}_{ov_2} \quad \dots \quad \vec{u}_{ov_l} \quad \vec{u}_{01})$$

wobei

(60)

$$\vec{u}_{ov_i}^T = (uovi_0 \quad uovi_1 \quad uovi_2 \quad \dots \quad uovi_{\sigma_R})$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

Zu \underline{U} gehört ausserdem der Vektor der v -Stützwerte

$$\vec{v}_a^T = (0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_l \quad 1) \quad (61)$$

Bild 31 veranschaulicht ein Beispiel mit $l = 2$ Zusatz-"u-Kurven", also $nus = 4$.

Wir verwenden wiederum den Zwischenkurvenansatz (42). Die linken Seiten der Bestimmungsgleichungen (43) sind dabei ab der 3. Gleichung zu ergänzen, denn in

$$f_i \quad i = 1, 2, \dots, \sigma$$

und

$$g_j \quad j = 1, 2, \dots, \rho$$

gehen nunmehr auch die partiellen Ableitungen in den Anfangs- und Endpunkten der Zusatz "u-Kurven" ein:

$$\begin{aligned}
 f_1(v, & \frac{\partial(u_{oo}(o))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{ov_1}(o))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{ov_2}(o))}{\partial u}, \dots, \\
 & \frac{\partial(u_{ov_1}(o))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{ol}(o))}{\partial u}) \\
 f_2(v, & \frac{\partial^2(u_{oo}(o))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{ol}(o))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{ov_2}(o))}{\partial u^2}, \dots, \\
 & \frac{\partial^2(u_{ov_1}(o))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{ol}(o))}{\partial u^2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 f_\sigma(v, & \frac{\partial^\sigma(u_{oo}(o))}{\partial u^\sigma}, \frac{\partial^\sigma(u_{ov_1}(o))}{\partial u^\sigma}, \frac{\partial^\sigma(u_{ov_2}(o))}{\partial u^\sigma}, \dots, \\
 & \frac{\partial^\sigma(u_{ov_1}(o))}{\partial u^\sigma}, \frac{\partial^\sigma(u_{ol}(o))}{\partial u^\sigma})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 g_1(v, & \frac{\partial(u_{oo}(1))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{ov_1}(1))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{ov_2}(1))}{\partial u}, \dots, \\
 & \frac{\partial(u_{ov_1}(1))}{\partial u}, \frac{\partial(u_{oi}(1))}{\partial u}) \\
 g_2(v, & \frac{\partial^2(u_{oo}(1))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{ov_1}(1))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{ov_2}(1))}{\partial u^2}, \dots, \\
 & \frac{\partial^2(u_{ov_1}(1))}{\partial u^2}, \frac{\partial^2(u_{oi}(1))}{\partial u^2}) \\
 & \dots \\
 g_p(v, & \frac{\partial^p(u_{oo}(1))}{\partial u^p}, \frac{\partial^p(u_{ov_1}(1))}{\partial u^p}, \frac{\partial^p(u_{ov_2}(1))}{\partial u^p}, \dots, \\
 & \frac{\partial^p(u_{ov_1}(1))}{\partial u^p}, \frac{\partial^p(u_{oi}(1))}{\partial u^p})
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

Mit diesen linken Seiten lässt sich das Gleichungssystem ebenfalls in der Form (46) schreiben, wobei auch (47) bis (51) gelten. Die rechte Seite (52) bleibt ohnehin ungeändert. Neu verfügen müssen wir dagegen über die Koeffizienten der Randfunktionen

$$f_i \quad \text{und} \quad g_j.$$

Aus (54) bis (56) ging hervor, dass bei vier Randkurven Randfunktionen 1. Ordnung angesetzt wurden. Im aktuellen Fall setzen wir Randfunktionen der Ordnung

$$R\emptyset R = \text{nus} - 1 \quad (63)$$

bei der eindeutigen Bestimmung der Koeffizienten an.

Es ist jedoch aus numerisch-rechentechnischen Gründen bekanntlich nicht zweckmässig, Ordnungen $R\emptyset R > 5$ zu wählen. Sollte nun $\text{nus} > 6$ sein, kann die Randfunktion nur mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung bei Verwendung $R\emptyset R \leq 5$ approximiert werden.

Die Elemente von \vec{f}_i und \vec{g}_j , siehe (48) und (49) ergeben sich aus folgenden Gleichungssystemen:

$$\underline{H}_{\text{nus}, R\emptyset R+1} \cdot \vec{f}_{i, R\emptyset R+1, 1} = \underline{U}_{\text{nus}, \emptyset R+1}^T \cdot (\vec{d}_i)_{\emptyset R+1, 1} \quad (64)$$

$$\underline{H}_{\text{nus}, R\emptyset R+1} \cdot \vec{g}_{j, R\emptyset R+1, 1} = \underline{U}_{\text{nus}, \emptyset R+1}^T \cdot (\vec{e}_j)_{\emptyset R+1, 1} \quad (65)$$

mit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & v_1 & v_1^2 & \dots & v_1^{R\emptyset R} \\ 1 & v_2 & v_2^2 & \dots & v_2^{R\emptyset R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & v_1 & v_1^2 & \dots & v_1^{R\emptyset R} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

dabei gilt die Bedingung (48).

Folglich

$$(\vec{f}_i)_{\text{nus},1} = \underline{H}_{\text{nus},\text{nus}}^{-1} \cdot \underline{U}_{\text{nus},\emptyset R+1}^T \cdot (\vec{d}_i)_{\emptyset R+1,1} \quad (66)$$

$$(\vec{g}_j)_{\text{nus},1} = \underline{H}_{\text{nus},\text{nus}}^{-1} \cdot \underline{U}_{\text{nus},\emptyset R+1}^T \cdot (\vec{e}_j)_{\emptyset R+1,1} \quad (67)$$

Wenn alle Elemente von \vec{f}_i und \vec{g}_j bestimmt werden sollen, so muss $\emptyset R = R\emptyset R$ gelten.

Bei $R\emptyset R < \emptyset R$ ist zusätzlich festzulegen:

$$f_{i_{\text{nus}+1}} = f_{i_{\text{nus}+2}} = \dots = f_{i_{\emptyset R}} = 0$$

$$g_{j_{\text{nus}+1}} = g_{j_{\text{nus}+2}} = \dots = g_{j_{\emptyset R}} = 0$$

Nunmehr lässt sich (46) wiederum zur Form (57) auflösen, ebenso gilt (58) für die Zwischenkurve.

Um die Bezeichnung der Flächengleichungskoeffizienten auch diesmal wieder auf den Ansatz abzustimmen, kürzen wir ab:

$$\underline{M}_{u,u} = \underline{G}_{u,u}^{-1} \cdot \underline{K}_{u,u}$$

Somit

$$F(u,v) = \vec{u}_{1,u}^T \cdot \underline{M}_{u,u} \cdot \vec{v}_{u,1} \quad (68)$$

2.3.1.5. Erzeugen symmetrischer Teilflächen

Eine Fläche $F_1(u_1, v_1)$ (69)

mit $0 \leq u_1 \leq 1$
 $0 \leq v_1 \leq 1$

sei vorgegeben.

Gemäss Bild 32 gilt trivialerweise im Falle der Spiegelung an der Leitkurve v_{00} :

$$F_2(u_2, v_2) = F_2(-u_1, v_1) = F_1(u_1, v_1) \quad (70)$$

mit

$$0 \geq u_2 \geq -1$$

$$v_2 = v_1$$

Analog gilt für die Spiegelung an der Erzeugenden u_{00} :

$$F_4(u_4, v_4) = F_4(u_1, -v_1) = F_1(u_1, v_1) \quad (71)$$

mit

$$0 \geq v_4 \geq -1$$

$$u_4 = u_1$$

Und im Falle der Doppelspiegelung:

$$F_3(u_3, v_3) = F_3(-u_1, -v_1) = F_1(u_1, v_1) \quad (72)$$

mit

$$0 \geq u_3 \geq -1$$

$$0 \geq v_3 \geq -1$$

2.3.2. Zusammenschluss mehrerer Flächenstücke

Der in 2.3.1.3. und 2.3.1.4. vorgestellte Algorithmus gestattet, auf einfache Art und Weise bei Einhaltung gewisser Voraussetzungen beliebig viele Flächenstücke zu einem Streifenverband in Richtung der Erzeugenden-Kurven zusammenzuschliessen.

Dabei wird in Abhängigkeit von der vorgegebenen Ordnung der Fläche die Stetigkeit der Ableitungen bis zur Ordnung /siehe (44) / in Richtung der Erzeugenden-Kurven auch an den Übergangsstellen garantiert.

Im Falle 2. 3.1.4 kommen noch hinzu:

$$\frac{\partial^j(u_{ov_1}(1))_I}{\partial u^j} = \frac{\partial^i(u_{ov_1}(0))_{II}}{\partial u^i}$$

$$\frac{\partial^j(u_{ov_2}(1))_I}{\partial u^j} = \frac{\partial^i(u_{ov_2}(0))_{II}}{\partial u^i}$$

74

.....

$$\frac{\partial^j(u_{ov_1}(1))_I}{\partial u^j} = \frac{\partial^i(u_{ov_1}(0))_{II}}{\partial u^i}$$

Für i und j gilt stets (50) und (51).

Die Voraussetzungen dazu sind /siehe Bild 33/ im Falle 2.3.1.3. für das Beispiel des Zusammenschlusses zweier Flächenstücke I und II mit $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned}
 (v_{10})_I &\equiv (v_{00})_{II} \\
 \frac{\partial(u_{00}(1))_I}{\partial u} &= \frac{\partial(u_{00}(0))_{II}}{\partial u} \\
 \frac{\partial^2(u_{00}(1))_I}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2(u_{00}(0))_{II}}{\partial u^2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\partial^\rho(u_{00}(1))_I}{\partial u^\rho} &= \frac{\partial^\sigma(u_{00}(0))_{II}}{\partial u^\sigma} \\
 \frac{\partial(u_{01}(1))_I}{\partial u} &= \frac{\partial(u_{01}(0))_{II}}{\partial u} \\
 \frac{\partial^2(u_{01}(1))_I}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2(u_{01}(0))_{II}}{\partial u^2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\partial^\rho(u_{01}(1))_I}{\partial u^\rho} &= \frac{\partial^\sigma(u_{01}(0))_{II}}{\partial u^\sigma}
 \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned}
 (v_{10})_I &\equiv (v_{00})_{II} \\
 \frac{\partial^j(u_{00}(1))_I}{\partial u^j} &= \frac{\partial^i(u_{00}(0))_{II}}{\partial u^i} \\
 \frac{\partial^j(u_{01}(1))_I}{\partial u^j} &= \frac{\partial^i(u_{01}(0))_{II}}{\partial u^i}
 \end{aligned} \tag{73}$$

Nach den Vorbetrachtungen in 2.1. erkennt man nunmehr leicht, dass die Voraussetzungen (73) und (74) durch das Ansatzverfahren geschaffen werden können.

Behauptung:

Mit (73) und ggf. zusätzlich mit (74) gilt

$$(u_{ov}(1))_I = (u_{ov}(0))_{II} \quad (75)$$

$$\frac{\partial^j (u_{ov}(1))_I}{\partial u^j} = \frac{\partial^i (u_{ov}(0))_{II}}{\partial u^i}$$

Beweis:

$$(u_{ov}(1))_I = (v_{10}(v))_I$$

$$(u_{ov}(0))_{II} = (v_{00}(v))_{II}$$

$$(v_{10}(v))_I = (v_{00}(v))_{II} \quad \text{nach Prämisse}$$

und es gilt (73):

$$\frac{\partial^j (u_{ov}(1))_I}{\partial u^j} = (g_j)_I \quad \text{siehe (43) bzw. (62)}$$

$$\frac{\partial^i (u_{ov}(0))_{II}}{\partial u^i} = (f_i)_{II}$$

Voraussetzungsgemäß ist

$$(g_j)_I = (f_i)_{II}$$

Somit gilt (76).

q. e. d.

Bezeichnen wir die aktuellen Nachbarflächenstücke mit N und $N + 1$ statt I und II und vertauschen entsprechend auch die Indizes, dann stellen (73) und (74) die Voraussetzungen für den Zusammenschluss zweier beliebiger Nachbarflächenstücke innerhalb eines Streifenverbandes in Richtung der Erzeugenden dar.

Bisher hatten wir $\sigma = 0$ gesetzt. Gilt $\sigma \neq 0$, dann kann die Stetigkeit der Ableitungen im gesamten Streifenverband ebenfalls bis zur Ordnung σ garantiert werden. Zu beachten ist dabei:

Geben wir im Anfangspunkt der Zwischenkurve die Ableitungen bis zur σ . Ordnung vor, dann sind im Endpunkt nur die Ableitungen bis zur Ordnung ρ frei wählbar. Die σ . Ableitung im Endpunkt der Zwischenkurve ist damit festgelegt. Zur Absicherung der Stetigkeit beim Übergang zum nächsten Flächenstück müssen demzufolge die Ableitungen bis zur σ . Ordnung am Endpunkt der Zwischenkurve des Flächenstückes N auf den Anfangspunkt der Zwischenkurve des Flächenstückes $N + 1$ übertragen werden.

Beabsichtigen wir, mehrere Flächenstücke in einem Blockverband zusammenzufassen, so muss zusätzlich noch die Stetigkeit in Leitkurvenrichtung gewährleistet werden.

Im allgemeinen wird der Ansatz in 2.3.1.3. bzw. 2.3.1.4. diese Stetigkeit nicht in jedem beliebigen Grenzkurvenpunkt garantieren können. Der Algorithmus "MØBIL" /"bewegliche Zwischenkurve"/, wie wir den diskutierten Ansatz auch nennen wollen, erzeugt jedoch alle notwendigen Funktionen für einen Übergang zur allgemeinen anstiegskorrigierten Fläche nach COONS [14].

Auch ein anderer Weg ist möglich zum nachträglichen Zusammenschluss mehrerer Streifenverbände in Leitkurvenrichtung:

Die Anwendung der korrelierten bedingten Ausgleichung /siehe Abschnitt 3.5./.

In einem Hauptanwendungsfall /siehe Abschnitt 6./ wird bewusst darauf verzichtet bzw. es entfällt oben genannte Forderung.

2.3.3. Separate Konstruktion von Rand- und Flächenkurven

Oft ist eine Begrenzung des Vorbereichs der Funktion $z = f(x, y)$ erwünscht. In 2.3.1.3. und 2.3.1.4. wurden die Erzeugenden- und die Leitkurven über dem Einheitsquadrat angeordnet. Wir hatten in diesen Abschnitten lediglich in Vorbereitung auf 2.4. die Hauptachsen des kartesischen Koordinatensystems mit $u, v, f(u, v)$ statt mit x, y, z bezeichnet.

Andere Flächenbegrenzungen können nachträglich durch Schnitte der bereits konstruierten Fläche mit "allgemeinen Zylinder- und Kegelflächen" erzeugt werden.

Wir legen dazu in der Grundrissebene eine geschlossene Spurkurve oder eine Kombination von einzelnen Spurkurven fest. Die Spurkurven können wahlweise in kartesischen Koordinaten, in Polarkoordinaten, in Parameterdarstellung oder auch nur in Wertetabellen bereitgestellt werden.

Unter der Voraussetzung, dass eine sinnvolle Begrenzung der Fläche entsteht, sind alle Klassen von Funktionen für die Spurkurven zugelassen.

Ferner legen wir einen Punkt im Raume als Zentralpunkt fest. Damit seien die erzeugenden Geraden von jedem Punkt der Spurkurve zum Zentralpunkt gegeben.

Es kommt nun darauf an, die Durchstosspunkte der erzeugenden Geraden durch die Fläche $z = f(x, y)$ zu ermitteln. Die Schnittkurven auf der Fläche werden mithin punktweise bestimmt.

Gebräuchliche Spurkurven könnten z. B. Kegelschnitte oder die Bilder von trigonometrischen und ganzen rationalen Funktionen sein.

Liegt der Zentralpunkt in endlicher Entfernung, so entsteht ein "allgemeiner Kegel", sonst ein "allgemeiner Zylinder".

Bei "allgemeinen Zylindern" interessiert besonders der Sonderfall normal zur Grundrissebene stehender Erzeugenden.

In diesem Fall genügt ein Einsetzen der aktuellen Wertepaare (x, y) der Spurkurve in die Flächengleichung $z = f(x, y)$, um die gesuchten Durchstosspunkte zu bestimmen.

Die Bilder 34 und 35 veranschaulichen zwei Beispiele zur Erzeugung von Flächenbegrenzungen. Je nach Aufgabenstellung können diese Flächenbegrenzungen auch als Flächenkurven innerhalb eines Flächenstückes interpretiert werden.

Auch die Aufgabe "Schnitt von zwei Flächen der Form $z = f(x, y)$ " lässt sich auf das Problem "Ermitteln des Durchstosspunktes einer Geraden durch die Fläche $z = f(x, y)$ " zurückführen. Dabei setzen wir voraus, dass eine reelle Schnittkurve existiert.

Diejenige Schar der Kurven der zweiten Fläche, die die erste Fläche durchdringt, wird in Nähe der Durchstosspunkte durch Polygonzüge ersetzt.

In den meisten Fällen wird die beschriebene "Durchschnittsmethode" ein Iterationsverfahren mit einer vorgebbaren rechnerischen Abbruchschranke erfordern.

2.4. Entwurf von Flächen in GAUSSscher Parameterdarstellung

Lassen wir die Voraussetzung der Darstellungsweise $z = f(x, y)$ fallen, ist der Übergang zur GAUSSschen Parameterdarstellung notwendig:

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \quad (77)$$

oder ausführlich:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \quad (78)$$

Die Fläche soll wiederum aus Erzeugenden- und Leitkurven abgeleitet werden. Mithin sind diese Stützkurven ebenfalls in Parameterdarstellung bereitzustellen.

Nehmen wir z. B. den Fall der Vorgabe von vier Randkurven, so benötigen wir die Kurven in der Form:

$$\begin{aligned} u_{00} &= u_{00}(t) \\ u_{01} &= u_{01}(t) \\ v_{00} &= v_{00}(t) \\ v_{10} &= v_{10}(t) \end{aligned} \quad (79)$$

Der Parameter t wird später noch spezifiziert.

Es sei hier lediglich nochmal daran erinnert, dass gilt:

$$0 \leq u, v, t \leq 1 \quad (80)$$

Zur Veranschaulichung des Sachverhaltes siehe Bilder (36) bis (38).

2.4.1. Entwurf von räumlichen Stützkurven in Parameterdarstellung zur Verwendung als Erzeugende- und Leitkurven

Wir betrachten die Einzeldarstellungen der Komponenten der Raumkurve:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (81)$$

Diskutiert sei nun, inwieweit die grundsätzlichen Überlegungen im Abschnitt 2.1. auf die Komponentendarstellungen (81) übertragbar sind.

Aus Tafel 3 geht hervor, welche Messdaten und Vorgaben im vorliegenden Fall möglich bzw. sinnvoll sind.

Dabei wird für den Parameter t die normierte Bogenlänge s gesetzt.

Tafel 4 zeigt an einem Beispiel, welche lokalen Eigenschaften einer Raumkurve durch das Ansatzverfahren gewährleistet bzw. kontrolliert werden können.

Die Gewährleistungs- bzw. Kontrollfunktion der Differentialgeometrie gewinnt Bedeutung im Zusammenhang mit der Festlegung bzw. Kontrolle der Fräserwege im NC-Fertigungsprozess.

Konstruieren wir eine Raumkurve nur aus geometrischen Vorgaben und ordnen wir dem Anfangs- bzw. Endpunkt der Raumkurve die Parameter 0 bzw. 1 zu, so erhalten wir damit sofort die notwendige Darstellungsform (81) für eine Rand- oder Stützkurve einer Fläche zur Verwendung als Erzeugende- oder Leitkurve.

Soll die Raumkurve jedoch nur aus gemessenen Stützpunkten oder aus der Kombination Stützpunkte und Vorgaben erzeugt werden, so müssen wir die Bogenlänge zum aktuellen Stützpunkt zumindest genähert bestimmen.

2.4.2. Näherungsweise Bestimmung der Bogenlänge einer räumlichen Stützkurve

Die Bogenlänge einer durch Stützpunkte festgelegten Raumkurve lässt sich in guter Näherung durch die Sehnepolygonzuglängen \tilde{s} ersetzen, wenn die Kurve unter der Bedingung Schrittweite $\Delta s \ll$ Gesamtbogenlänge s_e digitalisiert wird. Wie sich rechnerisch erwiesen hat, genügt es, die Komponenten der Raumkurve in der Form

$$\begin{aligned}
 x &= x(\tilde{s}) \\
 y &= y(\tilde{s}) \\
 z &= z(\tilde{s})
 \end{aligned}
 \tag{82}$$

darzustellen. Dabei normieren wir die Gesamtpolygonzuglänge.

Die Funktionen zu (82) können nach dem Ansatzverfahren gemäss 2.1. bestimmt werden.

2.4.3. GAUSSsche Parameterdarstellung der entworfenen Fläche

Liegen nun Stützkurven in der Form (81) bzw. (82) vor, so lassen sich ebenfalls die in 2.3.1. angegebenen Lösungsansätze realisieren. Nur handelt es sich jetzt jeweils um die 3 Komponenten x, y, z . Der Parameter t bzw. \tilde{s} wird je nach Richtung zum Parameter u bzw. v erklärt und die Flächendarstellung ergibt sich zu (78). Die Bilder 36 und 37 können auch als Veranschaulichung der Raumkurven"-Variante" von Abschnitt 2.3.1.3. ausgelegt werden.

Analog dazu liessen sich grafische Darstellungen zu den anderen Ansätzen zeichnen.

Wir beschränken uns hier auf das Notieren der numerischen Endergebnisse.

Im Falle der "Raumkurvenvariante" gilt bei 2.3.1.1.:

$$\begin{aligned}
 x &= x(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{XZ} \cdot \vec{v} \\
 y &= y(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{YZ} \cdot \vec{v} \\
 z &= z(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{ZZ} \cdot \vec{v}
 \end{aligned}
 \tag{83}$$

2.3.1.2.:

$$\begin{aligned}
 x &= x(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{XD} \cdot \vec{v} \\
 y &= y(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{YD} \cdot \vec{v} \\
 z &= z(u, v) = \vec{u} \cdot \underline{ZD} \cdot \vec{v}
 \end{aligned}
 \tag{84}$$

2.3.1.3.:

$$\begin{aligned}
 x &= x(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{XV} \cdot \vec{v} \\
 y &= y(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{YV} \cdot \vec{v} \\
 z &= z(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{ZV} \cdot \vec{v}
 \end{aligned}
 \quad (85)$$

2.3.1.4.:

$$\begin{aligned}
 x &= x(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{XM} \cdot \vec{v} \\
 y &= y(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{YM} \cdot \vec{v} \\
 z &= z(u, v) = \vec{u}^T \cdot \underline{ZM} \cdot \vec{v}
 \end{aligned}
 \quad (86)$$

2.4.4. Die Kontrollfunktion der Differentialgeometrie

Wenn eine Fläche $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ unter Verwendung der Näherungslösung nach 2.4.2. entworfen wurde, dann erscheint es sinnvoll, zur Kontrolle der geometrischen Eigenschaften der entworfenen Fläche differentialgeometrische Kriterien einzufügen.

Zu diesem Zweck bringen wir die im Abschnitt 1 wiederholten grundlegenden Beziehungen in folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_u^T &= (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \\
 \vec{x}_v^T &= (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \\
 \vec{x}_{uv}^T &= (c_1 \quad c_2 \quad c_3) \\
 \vec{x}_{uu}^T &= (d_1 \quad d_2 \quad d_3) \\
 \vec{x}_{vv}^T &= (e_1 \quad e_2 \quad e_3)
 \end{aligned}
 \quad (87)$$

$$\begin{aligned}
 E &= \vec{x}_u^T \cdot \vec{x}_u \\
 G &= \vec{x}_v^T \cdot \vec{x}_v \\
 F &= \vec{x}_u^T \cdot \vec{x}_v
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} i & j & t \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
 \tag{89}$$

$$\left. \begin{aligned}
 L &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 M &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 M &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{90}$$

Mit Hilfe von speziellen Prozeduren, siehe Abschnitt 5, lassen sich die benötigten Ableitungen (87), die Flächennormale (89) und die GAUSSschen Fundamentalgrößen I. und II. Art (88) und (90), das GAUSSsche Krümmungsmass und die mittlere Krümmung für jeden beliebigen Flächenpunkt (u, v) berechnen. Der Wert $(LN - M^2)$ kann für jeden Rasterpunkt eines

vorgegebenen beliebig engmaschigen u-v-Netzes berechnet, abgespeichert und ausgedruckt werden. Vorzeichenwechsel wird besonders signalisiert! Die abgespeicherten Werte können Grundlage für eine automatisch zu zeichnende Karte der Fläche mit Gebietseinteilung nach Kriterium

$$LN - M^2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{elliptische} \\ \text{parabolische} \\ \text{hyperbolische} \end{array} \right\} \quad \text{Punkte}$$

sein.

Jedoch selbst aus dem Rechnerprotokoll geht sofort durch besonderen Textausdruck augenfällig hervor, ob z. B. unverwünschte Wendepunkte /bei ebenen Schnitten/ bzw. hyperbolische Flächenpunkte auftreten.

2.4.5. Zusammenschluss mehrerer Flächenstücke

Die grundlegenden Gedanken wurden bereits im Abschnitt 2.3.2. zusammengetragen.

Was dort für eine Komponente notiert wurde, gilt genauso auch für die drei Komponenten x, y, z der Parameterdarstellung (78).

Wir halten hier lediglich noch einmal fest, dass bei Verwendung des Algorithmus "MØBIL" /2.3.1.3. und 2.3.1.4./ und Beachtung der Bedingungen (73) und (74) für alle drei Komponenten x, y, z sich ein Streifenverband von Flächenstücken in Parameterdarstellung aufbauen lässt. Dieser Streifenverband garantiert dann die Stetigkeit der 0. bis σ -ten Ableitung in Richtung der Erzeugenden-Kurven auch an den Übergangsstellen.

Ebenfalls sind die Möglichkeiten, Kombination mit der Lösung nach COONS und Abschnitt 3.5. bzgl. Blockverband, auf die drei Komponenten unmittelbar übertragbar.

3. Entwurf von Flächen der Darstellung $z = f(x, y)$ auf der Grundlage von Stützpunkten und geometrischen Vorgaben

3.1. Vorauszusetzende Messdaten und geometrische Vorgaben

Analog zu 2.1.1. gelte:

Eine Fläche $z = f(x, y)$ sei durch eine Anzahl gemessener Stützpunkte und geometrischer Vorgaben bestimmt. Dabei sollen wiederum die beiden Sonderfälle

- Fläche nur durch gemessene Stützpunkte und
- Fläche nur durch geometrische Vorgaben festgelegt, zugelassen sein.

Diesmal vereinbaren wir folgende Abkürzungen:

Mit Messfehlern behaftete Stützpunkte der Fläche

S_j - Stützpunkt

Geometrische Vorgaben:

P_k - Fixpunkte

TX_{lx} - Anstieg in x-Richtung

TY_{ly} - Anstieg in y-Richtung

KX_{mx} - Krümmung in x-Richtung

KY_{my} - Krümmung in y-Richtung

$j = 1, 2, \dots, n$

$mx = 1, 2, \dots, nkx$

$k = 1, 2, \dots, np$

$my = 1, 2, \dots, nky$

$lx = 1, 2, \dots, ntx$

$ly = 1, 2, \dots, nty$

$n, np, ntx, nty, nkx, nky$:

Jeweilige Anzahl der Messpunkte bzw. geometrischen Vorgaben.

Zu notieren ist weiterhin:

$$S_j = (x_j, y_j, z_j)$$

$$P_k = (x_k, y_k, z_k)$$

$$TX_{1x} = z_{x_{1x}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{1x}$$

$$TY_{1y} = z_{y_{1y}} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{1y}$$

$$KX_{mx} = \left(\frac{z_{xx}}{(1 + z_x^2)^{3/2}} \right)_{mx} = \left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2)^{3/2}} \right)_{mx}$$

$$KY_{my} = \left(\frac{z_{yy}}{(1 + z_y^2)^{3/2}} \right)_{my} = \left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2)^{3/2}} \right)_{my}$$

Sind in ausgezeichneten Punkten der Fläche elliptische Punkte /speziell Maxima und Minima/ oder hyperbolische Punkte vorgesehen, so können diese Vorgaben wiederum über die Fixpunkt-, Anstiegs- und Krümmungsbedingungen realisiert werden. Zunächst erinnern wir uns an die Bedingungen für Extrema:

Es sei $P_{\text{extrem}} = (x_{\text{extrem}}, y_{\text{extrem}}, z_{\text{extrem}})$, wobei für Index "extrem" entweder "max" oder "min" substituiert werden kann.

Notwendige Bedingung für Extrema:

$$f_x(x_{\text{extrem}}, y_{\text{extrem}}) = f_y(x_{\text{extrem}}, y_{\text{extrem}}) = 0 \quad (91)$$

Mit

$$\Delta(x_{\text{extrem}}, y_{\text{extrem}}) = \Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \quad (92)$$

notieren wir die hinreichenden Bedingungen:

$$\Delta > 0 \wedge f_{xx} < 0 \wedge f_{yy} < 0 \quad P_{\max} \quad (93)$$

$$\Delta > 0 \wedge f_{xx} > 0 \wedge f_{yy} > 0 \quad P_{\min} \quad (94)$$

Die Extrema gehören zu den elliptischen Punkten.
/GAUSSsches Krümmungsmass $K > 0$ /

Gilt jedoch (91) mit

$$\Delta = K < 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta = K = 0, \quad \begin{array}{l} (95) \\ \text{bzw.} \\ (96) \end{array}$$

so handelt es sich nicht um Extrema, sondern um hyperbolische⁺ Punkte mit horizontaler Tangentialebene.

Durch Vorgaben gemäss (91) bis (94) können wir mithin Extrema "konstruieren" bzw. nach (91), (95) und (96) hyperbolische bzw. parabolische Punkte erzeugen.

⁺ bzw. parabolische

3.2. "FLAECHENSEGMENT"-Ansatz

Erinnert sei an die Matrizenform der Flächendarstellungen im Abschnitt 2.3.1. Die Gleichungen (30), (37), (59) und (68) weisen alle die gleiche Bauart auf:

$$z = f(x, y) = \vec{x}_{1, \emptyset R+1}^T \cdot \underline{DX}_{\emptyset R+1, \emptyset R+1} \cdot \vec{y}_{\emptyset R+1, 1} \quad (97)$$

Bezüglich der Vektoren siehe (28).

Es sollen nun die Elemente der Matrix \underline{DX} direkt, d. h. durch Auflösen entsprechender Gleichungssysteme, bestimmt werden. Dazu gehen wiederum die gemessenen Stützpunktdaten in Verbesserungsgleichungen und die geometrischen Vorgaben in Bedingungsgleichungen im Sinne der Ausgleichsrechnung ein. Die Matrix \underline{DX} nennen wir fortan auch Koeffizientenmatrix, ihre Elemente Flächenkoeffizienten. Die Anzahl u der zu bestimmenden Flächenkoeffizienten ist.

$$u = (\emptyset R + 1) \cdot (\emptyset R + 1) \quad (98)$$

Die Ordnung der Fläche \emptyset_{RF} ergibt sich aus der Ordnung $\emptyset R$ der Vektoren \vec{x} und \vec{y} :

$$\emptyset_{RF} = 2 \cdot \emptyset R \quad (99)$$

Der Ansatz (97) heiße "FLAECHENSEGMENT"-Ansatz der Ordnung $\emptyset R$. Ausgewählte Beispiele für Kombinationen von Stützpunktdaten und geometrischen Vorgaben einschliesslich der Sonderfälle sind in Tafel 6 zusammengestellt. Zu beachten ist auch Tafel 5.

Gesamtanzahl der geometrischen Bedingungen:

$$r = n_p + n_{tx} + n_{ty} + n_{kx} + n_{ky}$$

Bezüglich der Ausgleichsrechnung gelten die gleichen grundsätzlichen Ausführungen wie im Abschnitt 2.1.2.1.

Die rechentechnischen Kennzahlen /Vorbereitung von Abschnitt 5/ sind aus Tafel 5 zu ersehen. Die Systeme der Verbesserungs- und Bedingungsgleichungen entsprechen rein formal in ihrem Auf-

bau (2) bzw. (7). Der Vektor \vec{v} der Verbesserungen (3) kann unmittelbar übernommen werden. Wir überspringen nun das Ausmultiplizieren der Ausgangsform (97) und bauen die Vektoren und Matrizen von (2) und (7) der Aufgabenstellung angemessen auf:

$$\vec{A}_{n,u} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{\emptyset R} & x_1 & x_1 y_1 & x_1 y_1^2 & \dots & x_1 y_1^{\emptyset R} & x_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1^2 y_1^2 & \dots & x_1^2 y_1^{\emptyset R} & \dots & x_1^{\emptyset R} y_1^{\emptyset R} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{\emptyset R} & x_2 & x_2 y_2 & x_2 y_2^2 & \dots & x_2 y_2^{\emptyset R} & x_2^2 & x_2^2 y_2 & x_2^2 y_2^2 & \dots & x_2^2 y_2^{\emptyset R} & \dots & x_2^{\emptyset R} y_2^{\emptyset R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^{\emptyset R} & x_n & x_n y_n & x_n y_n^2 & \dots & x_n y_n^{\emptyset R} & x_n^2 & x_n^2 y_n & x_n^2 y_n^2 & \dots & x_n^2 y_n^{\emptyset R} & \dots & x_n^{\emptyset R} y_n^{\emptyset R} \end{pmatrix}$$

$$\vec{dx}_{1,u}^T = (a_{00} \ a_{01} \ a_{02} \ \dots \ a_{0,\emptyset R} \ a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1,\emptyset R} \ a_{20} \ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2,\emptyset R} \ \dots \ a_{\emptyset R,\emptyset R})$$

$$\vec{-I}_{1,n}^T = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 & -z_3 & \dots & -z_n \end{pmatrix}$$

$\underline{BE}_{r,u} =$

1	y_1	y_1^2	...	$y_1^{\theta R}$	x_1	$x_1 y_1$	$x_1 y_1^2$...	$x_1 y_1^{\theta R}$	x_1^2	$x_1^2 y_1$	$x_1^2 y_1^2$...	$x_1^2 y_1^{\theta R}$...	$x_1^{\theta R} y_1^{\theta R}$
1	y_2	y_2^2	...	$y_2^{\theta R}$	x_2	$x_2 y_2$	$x_2 y_2^2$...	$x_2 y_2^{\theta R}$	x_2^2	$x_2^2 y_2$	$x_2^2 y_2^2$...	$x_2^2 y_2^{\theta R}$...	$x_2^{\theta R} y_2^{\theta R}$
...
1	y_{np}	y_{np}^2	...	$y_{np}^{\theta R}$	x_{np}	$x_{np} y_{np}$	$x_{np} y_{np}^2$...	$x_{np} y_{np}^{\theta R}$	x_{np}^2	$x_{np}^2 y_{np}$	$x_{np}^2 y_{np}^2$...	$x_{np}^2 y_{np}^{\theta R}$...	$x_{np}^{\theta R} y_{np}^{\theta R}$
0	0	0	...	0	1	y_1	y_1^2	...	$y_1^{\theta R}$	$2x_1$	$2x_1 y_1$	$2x_1 y_1^2$...	$2x_1 y_1^{\theta R}$...	$\emptyset R \cdot x_1^{\theta R} y_1^{\theta R}$
0	0	0	...	0	1	y_2	y_2^2	...	$y_2^{\theta R}$	$2x_2$	$2x_2 y_2$	$2x_2 y_2^2$...	$2x_2 y_2^{\theta R}$...	$\emptyset R \cdot x_2^{\theta R} y_2^{\theta R}$
...
0	0	0	...	0	1	y_{ntx}	y_{ntx}^2	...	$y_{ntx}^{\theta R}$	$2x_{ntx}$	$2x_{ntx} y_{ntx}$	$2x_{ntx} y_{ntx}^2$...	$2x_{ntx} y_{ntx}^{\theta R}$...	$\emptyset R \cdot x_{ntx}^{\theta R} y_{ntx}^{\theta R}$
0	1	$2y_1$...	$\emptyset R \cdot y_1^{\theta R}$	0	x_1	$2x_1 y_1$...	$\emptyset R \cdot x_1 y_1^{\theta R}$	0	x_1^2	$2x_1^2 y_1$...	$\emptyset R \cdot x_1^2 y_1^{\theta R}$...	$\emptyset R \cdot x_1^{\theta R} y_1^{\theta R}$
0	1	$2y_2$...	$\emptyset R \cdot y_2^{\theta R}$	0	x_2	$2x_2 y_2$...	$\emptyset R \cdot x_2 y_2^{\theta R}$	0	x_2^2	$2x_2^2 y_2$...	$\emptyset R \cdot x_2^2 y_2^{\theta R}$...	$\emptyset R \cdot x_2^{\theta R} y_2^{\theta R}$
...
0	1	$2y_{nty}$...	$\emptyset R \cdot y_{nty}^{\theta R}$	0	x_{nty}	$2x_{nty} y_{nty}$...	$\emptyset R \cdot x_{nty} y_{nty}^{\theta R}$	0	x_{nty}^2	$2x_{nty}^2 y_{nty}$...	$\emptyset R \cdot x_{nty}^2 y_{nty}^{\theta R}$...	$\emptyset R \cdot x_{nty}^{\theta R} y_{nty}^{\theta R}$
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	2	$2y_1$	$2y_1^2$...	$2y_1^{\theta R}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_1^{\theta R} y_1^{\theta R}$
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	2	$2y_2$	$2y_2^2$...	$2y_2^{\theta R}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_2^{\theta R} y_2^{\theta R}$
...
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	2	$2y_{nky}$	$2y_{nky}^2$...	$2y_{nky}^{\theta R}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_{nky}^{\theta R} y_{nky}^{\theta R}$
0	0	2	...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)y_1^{\theta R}$	0	0	$2x_1$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_1 y_1^{\theta R}$	0	0	$2x_1^2$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_1^2 y_1^{\theta R}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_1^{\theta R} y_1^{\theta R}$
0	0	2	...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)y_2^{\theta R}$	0	0	$2x_2$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_2 y_2^{\theta R}$	0	0	$2x_2^2$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_2^2 y_2^{\theta R}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_2^{\theta R} y_2^{\theta R}$
...
0	0	2	...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)y_{nky}^{\theta R}$	0	0	$2x_{nky}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_{nky} y_{nky}^{\theta R}$	0	0	$2x_{nky}^2$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_{nky}^2 y_{nky}^{\theta R}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_{nky}^{\theta R} y_{nky}^{\theta R}$

$\vec{w}_{r,1} =$

$$\begin{pmatrix}
 -z_1 \\
 -z_2 \\
 \vdots \\
 -z_{np} \\
 -TX_1 \\
 -TX_2 \\
 \vdots \\
 -TX_{ntx} \\
 -TY_1 \\
 -TY_2 \\
 \vdots \\
 -TY_{nty} \\
 -KX_1 \cdot (1 + TX_1^2)^{3/2} \\
 -KX_2 \cdot (1 + TX_2^2)^{3/2} \\
 \vdots \\
 -KX_{nkx} \cdot (1 + TX_{nkx}^2)^{3/2} \\
 -KY_1 \cdot (1 + TY_1^2)^{3/2} \\
 -KY_2 \cdot (1 + TY_2^2)^{3/2} \\
 \vdots \\
 -KY_{nky} \cdot (1 + TY_{nky}^2)^{3/2}
 \end{pmatrix}$$

3.3. "FLAECHENPOLYNOM"-Ansatz

Es sei eine Potenzfunktion beliebiger Ordnung in 2 Veränderlichen als Ansatzfunktion ausgewählt:

$$z = f(x, y) = \sum_{i=0}^{\varnothing R} \sum_{j=0}^{\varnothing R-i} a_{ij} x^i y^j \quad (100)$$

Diese Funktion wird oft zur Lösung von zweidimensionalen Interpolations- und Approximationsaufgaben eingesetzt, siehe z. B. [15] bis [19].

(100) lässt sich auch in die Form (97) überführen, jedoch verschwinden dabei alle Elemente von \underline{DX} unterhalb der Nebendiagonalen:

$$\underline{DX} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots & a_{0,\varnothing R-2} & a_{0,\varnothing R-1} & a_{0,\varnothing R} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,\varnothing R-2} & a_{1,\varnothing R-1} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,\varnothing R-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varnothing R-1,0} & a_{\varnothing R-1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{\varnothing R,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (101)$$

Bei diesem "FLAECHENPOLYNOM"-Ansatz sind somit weniger Unbekannte zu bestimmen:

$$u = \frac{1}{2}(\varnothing R + 1) \cdot (\varnothing R + 2) \quad (102)$$

Die Ordnung der Fläche ist identisch mit der Ordnung der Vektoren \vec{x} und \vec{y}

$$\emptyset_{RF} \equiv \emptyset_R \quad (103)$$

Wir gehen nun grundsätzlich genauso wie im Abschnitt 3.2. vor. Die Matrizen und Vektoren zu (2) und (7) lauten:

$$A_{-n,u} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^R & x_1 & x_1 y_1 & x_1^2 y_1^2 & \dots & x_1^R y_1^{R-1} & x_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1^2 y_1^2 & \dots & x_1^2 y_1^{R-2} & \dots & x_1^R \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^R & x_2 & x_2 y_1 & x_2^2 y_2^2 & \dots & x_2^{R-1} y_2 & x_2^2 & x_2^2 y_2 & x_2^2 y_2^2 & \dots & x_2^{R-2} y_2^2 & \dots & x_2^R \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^R & x_n & x_n y_n & x_n^2 y_n^2 & \dots & x_n^{R-1} y_n & x_n^2 & x_n^2 y_n & x_n^2 y_n^2 & \dots & x_n^{R-2} y_n^2 & \dots & x_n^R \end{pmatrix}$$

$$\vec{dx}_{u,l}^T = (a_{00} \ a_{01} \ a_{02} \ \dots \ a_{0,\emptyset R} \ a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1,\emptyset R-1} \ a_{20} \ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2,\emptyset R-2} \ \dots \ a_{\emptyset R,0})$$

$$-\vec{I}_{1,n}^T = (-z_1 \quad -z_2 \quad -z_3 \quad \dots \quad -z_n)$$

0	0	0	...	0	1	y_2	y_2^2	...	$y_2^{\emptyset R - 1}$	$2x_2$	$2x_2 y_2$	$2x_2 y_2^2$...	$2x_2 y_2^{\emptyset R - 2}$...	$\emptyset R \cdot x_2^{\emptyset R - 1}$
0	0	0	...	0	1	y_{ntx}	y_{ntx}^2	...	$y_{ntx}^{\emptyset R - 1}$	$2x_{ntx}$	$2x_{ntx} y_{ntx}$	$2x_{ntx} y_{ntx}^2$...	$2x_{ntx} y_{ntx}^{\emptyset R - 2}$...	$\emptyset R \cdot x_{ntx}^{\emptyset R - 1}$
0	1	$2y_1$...	$\emptyset R \cdot y_1^{\emptyset R - 1}$	0	x_1	$2x_1 y_1$...	$(\emptyset R - 1)x_1 y_1^{\emptyset R - 2}$	0	x_1^2	$2x_1^2 y_1$...	$(\emptyset R - 2)x_1^2 y_1^{\emptyset R - 3}$...	0
0	1	$2y_2$...	$\emptyset R \cdot y_2^{\emptyset R - 1}$	0	x_2	$2x_2 y_2$...	$(\emptyset R - 1)x_2 y_2^{\emptyset R - 2}$	0	x_2^2	$2x_2^2 y_2$...	$(\emptyset R - 2)x_2^2 y_2^{\emptyset R - 3}$...	0
0	1	$2y_{nty}$...	$\emptyset R \cdot y_{nty}^{\emptyset R - 1}$	0	x_{nty}	$2x_{nty} y_{nty}$...	$(\emptyset R - 1)x_{nty} y_{nty}^{\emptyset R - 2}$	0	x_{nty}^2	$2x_{nty}^2 y_{nty}$...	$(\emptyset R - 2)x_{nty}^2 y_{nty}^{\emptyset R - 3}$...	0
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	2	$2y_1$	$2y_1^2$...	$2y_1^{\emptyset R - 2}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_1^{\emptyset R - 2}$
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	2	$2y_2$	$2y_2^2$...	$2y_2^{\emptyset R - 2}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_2^{\emptyset R - 2}$
0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	2	$2y_{nkx}$	$2y_{nkx}^2$...	$2y_{nkx}^{\emptyset R - 2}$...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)x_{nkx}^{\emptyset R - 2}$
0	0	2	...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)y_1^{\emptyset R - 2}$	0	0	$2x_1$...	$(\emptyset R - 1)(\emptyset R - 2)x_1 y_1^{\emptyset R - 3}$	0	0	$2x_1^2$...	$(\emptyset R - 2)(\emptyset R - 3)x_1^2 y_1^{\emptyset R - 4}$...	0
0	0	'	...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)y_2^{\emptyset R - 2}$	0	0	$2x_2$...	$(\emptyset R - 1)(\emptyset R - 2)x_2 y_2^{\emptyset R - 3}$	0	0	$2x_2^2$...	$(\emptyset R - 2)(\emptyset R - 3)x_2^2 y_2^{\emptyset R - 4}$...	0
0	0	2	...	$\emptyset R(\emptyset R - 1)y_{nky}^{\emptyset R - 2}$	0	0	$2x_{nky}$...	$(\emptyset R - 1)(\emptyset R - 2)x_{nky} y_{nky}^{\emptyset R - 3}$	0	0	$2x_{nky}^2$...	$(\emptyset R - 2)(\emptyset R - 3)x_{nky}^2 y_{nky}^{\emptyset R - 4}$...	0

$\vec{w}_{i,1}$ wird vom ||FLACHENSEGMENT||-Ansatz unverändert übernommen.

Ersichtlich handelt es sich um die gleichen prinzipiellen Messdaten und Vorgaben wie beim "FLAECHENSEGMENT"-Ansatz /siehe Tafel 5/. Ausgewählte Beispiele finden wir ebenfalls in Tafel 6.

3.4. Wertigkeit der Messdaten und Vorgaben für die Bestimmung der Koeffizienten der Fläche

Die Aussagen in 2.1.3. können sinngemäss auch auf Abschnitt 3 übertragen werden. Nur finden wir diesmal die Wertigkeiten zu den Stützpunkten und Vorgaben in Tafel 5, und zu bestimmen sind die Koeffizienten von (97) bzw. (100). Da die Auflösbarkeit der entsprechenden Gleichungssysteme von der räumlichen Verteilung der Stützpunkte über dem Grundriss der Fläche abhängen wird, seien hier zusätzlich einige einfache geometrische Kriterien zur Charakterisierung der Anordnung der Stützpunkte bei Berücksichtigung der geometrischen Vorgaben vorgeschlagen. Wir beziehen uns dabei auf Bild 39:

$$2 - D - \text{Grobheitsmaß:} \quad \gamma = \frac{\sigma(d_{\max})^2}{4ab}$$

$$2 - D - \text{Feinheitsmaß:} \quad \delta = \frac{\sigma(d_{\min})^2}{4ab}$$

$$2 - D - \text{Charakteristik:} \quad \lambda = \frac{\gamma}{\delta} = \left(\frac{d_{\max}}{d_{\min}}\right)^2$$

$$x - \text{Grobheitsmaß:} \quad \gamma_x = \frac{\mu_{\max}}{a}$$

$$x - \text{Feinheitsmaß:} \quad \delta_x = \frac{\mu_{\min}}{a}$$

$$x - \text{Charakteristik:} \quad \lambda_x = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$$

$$y - \text{Grobheitsmaß:} \quad \gamma_y = \frac{v_{\max}}{a}$$

y - Feinheitssmaß:

$$\delta_y = \frac{v_{\min}}{b}$$

y - Charakteristik:

$$\lambda_y = \frac{v_{\max}}{v_{\min}}$$

$$d_{\max/\min} = \frac{\text{Anzahl der Punkte auf der Peripherie}}{\text{Gesamtwertigkeit aller Punkte}} \cdot \tilde{d}_{\max/\min}$$

$$\mu_{\max/\min} = \frac{2}{\text{Gesamtgewicht der entsprechenden Punkte}} \cdot \tilde{\mu}_{\max/\min}$$

$$v_{\max/\min} = \frac{2}{\text{Gesamtgewicht der entsprechenden Punkte}} \cdot \tilde{v}_{\max/\min}$$

wobei \tilde{d} , $\tilde{\mu}$ und \tilde{v} die gemessenen Werte darstellen.

Ersichtlich sind \tilde{d}_{\max} bzw. \tilde{d}_{\min} die Durchmesser der grösst- bzw. kleinstmöglichen Kreise, die durch je 3 oder mehr Stütz- oder Festpunkte festgelegt sind. Zu bemerken ist auch, dass mit Hilfe obiger Kriterien nur eine grobe Abschätzung über den Grundriss beabsichtigt ist. Eine sinnvolle Wahl der z-Koordinaten muss vorausgesetzt werden.

Für das Beispiel aus Bild 39 ergibt sich:

$$\left. \begin{array}{l} d_{\max} \approx \frac{3}{7} \cdot 0,675 \approx 0,29 \\ d_{\min} \approx \frac{3}{5} \cdot 0,32 \approx 0,19 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \approx 2,27$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{\max} \approx \frac{2}{6} \cdot 0,2 \approx 0,067 \\ \mu_{\min} \approx \frac{2}{4} \cdot 0,012 \approx 0,006 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_x \approx 11$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{\max} \approx \frac{2}{2} \cdot 0,2 \approx 0,2 \\ v_{\min} \approx \frac{2}{2} \cdot 0,02 \approx 0,02 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_y \approx 10$$

Offensichtlich liegt eine ideale Punktanordnung und Vorgabenverteilung vor, wenn

$$\lambda_x = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_y = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_x = 1 \quad \text{gilt.}$$

Falls es die Aufgabe erfordert, kann man auch durch entsprechende Punktdichte in einer auszuzeichnenden Koordinatenrichtung λ_x oder λ_y die Priorität einräumen.

Aus Bild 39 entnehmen wir ferner:

$$n = n_p = 7, \quad n_{tx} = n_{ty} = 2, \quad n_{kx} = n_{ky} = 1,$$

somit Anzahl der Bedingungsgleichungen $r = 13$ und Gesamtwertigkeit $\Sigma W \leq 20$.

Daraus folgt, dass mit diesen Stützpunkten und Vorgaben die Koeffizienten eines Flächensegmentes dritter Ordnung / 16 Koeffizienten/ oder eines Flächenpolynoms vierter Ordnung / 15 Koeffizienten/ ermittelt werden können, denn in beiden Fällen gilt $n > u - r$.

3.5. Zusammenschluss mehrerer Flächenstücke

Betrachtet seien zwei Nachbarflächenstücke gemäss Bild 40:

$$z_A = f_A(x, y) \quad \text{und} \quad z_B = f_B(x, y)$$

Die Bedingungsgleichungen für den Zusammenschluss bis zur 2. Ableitung lauten:

$$f_A(1, y) = f_B(1, y) \quad (104)$$

$$\frac{\partial f_A(1, y)}{\partial x} = \frac{\partial f_B(1, y)}{\partial x} \quad (105)$$

$$\frac{\partial^2 f_A(1, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_B(1, y)}{\partial x^2} \quad (106)$$

Gewählt sei zunächst der Flächensegmentansatz der Ordnung " $\emptyset R$ " (97). Dabei gelten σ und ρ in der Bedeutung von (44) und (45). (104) bis (106) können wir somit ausführlicher schreiben:

$$\begin{aligned}
 f_A(1,0) &= f_B(1,0) \\
 f_A(1,1) &= f_B(1,1) \\
 \frac{\partial f_A(1,0)}{\partial y} &= \frac{\partial f_B(1,0)}{\partial y} \\
 \frac{\partial^2 f_A(1,0)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f_B(1,0)}{\partial y^2} \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{\partial^\sigma f_A(1,0)}{\partial y^\sigma} &= \frac{\partial^\sigma f_B(1,0)}{\partial y^\sigma} \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{\partial f_A(1,1)}{\partial y} &= \frac{\partial f_B(1,1)}{\partial y} \\
 \frac{\partial^2 f_A(1,1)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f_B(1,1)}{\partial y^2} \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{\partial^\rho f_A(1,1)}{\partial y^\rho} &= \frac{\partial^\rho f_B(1,1)}{\partial y^\rho}
 \end{aligned}
 \tag{104s}$$

Damit ist die Grenzkurve /siehe Bild 41/ mit ihren $\emptyset R + 1$ Koeffizienten eindeutig festgelegt.

Bild 42 veranschaulicht die über der y -Achse aufgetragenen Tangentenanstiege quer zur Grenzkurve. Die entstehende Kurve wird fixiert durch:

$$\frac{\partial f_A(1, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f_B(1, 0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_A(1, 1)}{\partial x} = \frac{\partial f_B(1, 1)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f_A(1, 0)}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f_B(1, 0)}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 f_A(1, 0)}{\partial x \cdot \partial y^2} = \frac{\partial^3 f_B(1, 0)}{\partial x \cdot \partial y^2}$$

.....

(105s)

$$\frac{\partial^{\sigma+1} f_A(1, 0)}{\partial x \cdot \partial y^{\sigma}} = \frac{\partial^{\sigma+1} f_B(1, 0)}{\partial x \cdot \partial y^{\sigma}}$$

$$\frac{\partial^2 f_A(1, 1)}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f_B(1, 1)}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 f_A(1, 1)}{\partial x \cdot \partial y^2} = \frac{\partial^3 f_B(1, 1)}{\partial x \cdot \partial y^2}$$

.....

$$\frac{\partial^{\rho+1} f_A(1, 1)}{\partial x \cdot \partial y^{\rho}} = \frac{\partial^{\rho+1} f_B(1, 1)}{\partial x \cdot \partial y^{\rho}}$$

und schliesslich gilt für die Änderung des Anstieges in x-Richtung /Bild 43/:

$$\frac{\partial^2 f_A(1, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_B(1, 0)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_A(1, 1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_B(1, 1)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 f_A(1, 0)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f_B(1, 0)}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^4 f_A(1, 0)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f_B(1, 0)}{\partial x^2 \partial y^2}$$

.....

$$\frac{\partial^{\sigma+2} f_A(1, 0)}{\partial x^2 \partial y^\sigma} = \frac{\partial^{\sigma+2} f_B(1, 0)}{\partial x^2 \partial y^\sigma} \quad (106s)$$

$$\frac{\partial^3 f_A(1, 1)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f_B(1, 1)}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^4 f_A(1, 1)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f_B(1, 1)}{\partial x^2 \partial y^2}$$

.....

$$\frac{\partial^{\rho+2} f_A(1, 1)}{\partial x^2 \partial y^\rho} = \frac{\partial^{\rho+2} f_B(1, 1)}{\partial x^2 \partial y^\rho}$$

Beim Zusammenschluss von 2 FLÄCHENSEGMENTEN ergeben sich somit im Falle der Gewährleistung der Stetigkeit bis zur 1. Ableitung $2/\phi R + 1$ Bedingungsgleichungen. Mit $3/\phi R + 1$ Bedingungsgleichungen kann man die Stetigkeit bis zur 2. Ableitung garantieren.

Analog lassen sich die ausführlichen Fassungen von (104) bis (106) beim FLAECHENPOLYNOM - Ansatz (100) notieren.

Zu beachten ist dabei, dass weniger Bedingungsgleichungen notwendig sind. Man erhält im Falle der Garantie der Stetigkeit bis zur ersten bzw. zweiten Ableitung $2 \cdot \emptyset R + 1$ bzw. $3 \cdot \emptyset R$ Bedingungsgleichungen.

Ist der Zusammenschluss eines Verbandes von Flächenstücken gemäss Bild 44 vorgesehen, so sind, grob abgeschätzt, folgende Anzahlen an Bedingungsgleichungen nötig: ^{x)}

FLAECHENSEGMENT - Ansatz

Stetigkeit bis zur 1. Ableitung:

$$r \approx (n_x - 1) \cdot n_y \cdot 2(\emptyset R + 1) + (n_y - 1) \cdot n_x \cdot 2(\emptyset R + 1)$$

Stetigkeit bis zur 2. Ableitung:

$$r \approx (n_x - 1) \cdot n_y \cdot 3(\emptyset R + 1) + (n_y - 1) \cdot n_x \cdot 3(\emptyset R + 1)$$

FLAECHENPOLYNOM - Ansatz,

Stetigkeit bis zur 1. Ableitung:

$$r \approx (n_x - 1) \cdot n_y \cdot 2 \cdot \emptyset R + 1 + (n_y - 1) \cdot n_x \cdot 2 \cdot \emptyset R + 1$$

Stetigkeit bis zur 2. Ableitung:

$$r \approx (n_x - 1) \cdot n_y \cdot 3 \cdot \emptyset R + (n_y - 1) \cdot n_x \cdot 3 \cdot \emptyset R$$

Bezogen auf ein Beispiel mit $\emptyset R = 4$ und $n_x = n_y = 3$ ergibt sich:

$$r \approx 120 \quad \text{bzw.} \quad 180 \quad \text{bei FLAECHENSEGMENT}$$

$$r \approx 108 \quad \text{bzw.} \quad 144 \quad \text{bei FLAECHENPOLYNOM}$$

^{x)} Mit r wird stets die obere Schranke angegeben.

Schon aus dieser groben Abschätzung geht hervor, dass die Verwendung solch umfangreicher Systeme von Bedingungsgleichungen für den Entwurfsprozess aus ökonomischen Gründen nicht zu vertreten ist. In Einzelfällen, vor allem für die Zwecke der stückweisen Beschreibung von vorhandenen Flächen, kann jedoch auch dieser prinzipielle Weg zum Zusammenschluss von Flächenstücken zum Ziele führen /siehe [62]/. Im Sinne des Ansatzverfahrens sollte sich die Anwendung der Stützpunktverfahren auf Einzelflächenstücke oder höchstens auf zwei bis drei benachbarte Flächenstücke beschränken. Die beim Zusammenschluss notwendigen Bedingungsgleichungen können auf verschiedene Weise verwendet werden.

1. Möglichkeit: Simultane Bestimmung der Koeffizienten der einzelnen Flächenstücke bei Beachtung der Bedingungsgleichungen /Anwendung des Ausgleichungsfalles "Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen"/.

2. Möglichkeit: Bestimmung der Koeffizienten eines Ausgangsflächenstückes nach den Prinzipien des Ansatzverfahrens und nachträgliche Anpassung von Nachbarflächenstücken bei Beachtung der Bedingungsgleichungen /Ebenfalls Anwendung oben genannten Falles der Ausgleichungsrechnung/.

3. Möglichkeit: Separate Bestimmung der Koeffizienten von Einzelflächenstücken ohne Beachtung von Nebenbedingungen /"Vermittelnde Ausgleichung"/. Nachträglicher simultaner Zusammenschluss der benachbarten Flächenstücke mit Hilfe einer "korrelierten bedingten Ausgleichung" /in der Geodäsie ist dieser Weg als BESSELSche Lösung bekannt/.

Im Entwurfsprozess wird die Anwendung oben genannter Möglichkeiten des Zusammenschlusses im Rahmen der Stützpunktverfahren zu den Seltenheiten gehören. Der Entwurf von Verbänden von Flächenstücken gelingt mit Hilfe der Stützkurvenverfahren und ggf. bei Nutzung des COONschen Ansatzes weniger aufwendig.

3.6. Separate Konstruktion von Rand- und Flächenkurven

Die Ausführungen in 2.3.3. gelten auch hier in vollem Umfange.

4. Superposition von Flächen

4.1. Fall $z = f(x, y)$

Flächen der Darstellungsform $z = f(x, y)$ können bezüglich eines gemeinsamen Grundrisses auf einfache Weise überlagert werden. Das Ergebnis der Superposition \mathcal{Q} ergibt sich durch Addition der Primärfläche \mathcal{Q}_0 und der Sekundärfläche \mathcal{Q}_i :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Beispiele für \mathcal{Q}_0 und \mathcal{Q}_i $i = 1, 2, \dots, 5$ finden wir in den Bildern 45 bis 50 dargestellt. Ersichtlich handelt es sich bei diesen vorgegebenen Sekundärflächen um Zylinderflächen. Einschlägige Geometrie - Lehrbücher und Nachschlagwerke /z.B. [25], S. 67 - 95/ bieten dem Konstrukteur eine Fülle von Anregungen. In den Bildern 47 bis 50 wurden gebrochene rationale, Exponential- und trigonometrische Funktionen als Leitkurven der Zylinderflächen ausgewählt.

4.2. Fall $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$

Es sollen zunächst zwei Flächen mit im Grundriss gleichem Parameterliniennetz über dem Bereich

$$\mathcal{B} : \left\{ \begin{array}{l} u_1 \leq u \leq u_2 \\ v_1 \leq v \leq v_2 \end{array} \right\}$$

superponiert werden.

Gegeben seien \mathcal{f} und \mathcal{h} gemäss Bild 51. Das Überlagerungsergebnis \mathcal{p} ist dann:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{wobei}$$

$$x(u, v) = f_1(u, v) = h_1(u, v)$$

$$y(u, v) = f_2(u, v) = h_2(u, v)$$

$$z(u, v) = \begin{cases} f_3(u, v) + h_3(u, v) \\ f_3(u, v) \end{cases} \quad \text{wenn} \quad \begin{cases} (u, v) \in \mathcal{B} \\ (u, v) \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

Ersichtlich sind die z -Koordinaten der vier Randkurven von h gleich Null. Die zu überlagernde Fläche h nimmt nur innerhalb des Bereiches \mathcal{B} von Null verschiedene Werte an.

Nun zur Superposition zweier Flächen mit unterschiedlichem $u - v$ - Netz:

Bereitgestellt seien die Flächen \mathcal{M} und \mathcal{N} , konstruiert mit den bekannten Verfahren. Aus Bild 52 ist zu entnehmen, dass die z -Koordinaten der Randkurven v_{00} und v_{10} von \mathcal{N} in diesem Beispiel verschwinden sollen. Das Ergebnis der Überlagerung $\mathcal{Q} = \mathcal{M} + \mathcal{N}$ gewinnt man punktweise in 2 Stufen.

Zuerst werden bei vorgegebener Schrittweite alle Wertepaare $(u, v) \Leftrightarrow (x, y, z)$ von \mathcal{N} berechnet und abgespeichert.

Sodann werden zu allen Wertepaaren (x, y) von \mathcal{N} mit Hilfe eines Suchalgorithmus die entsprechenden (u, v) -Werte von \mathcal{M} , sowie die zugeordneten z -Koordinaten von \mathcal{M} ermittelt und die korrespondierenden z -Werte addiert.

Symbolisch:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{m+n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_m + z_n \end{pmatrix}$$

wobei

$$x = x_m = x_n$$

und

$$y = y_m = y_n$$

5. Rechentechnische Realisierung der Flächenentwurfsverfahren einschliesslich numerischer und grafischer Kontrolle

Es sind vier ALGOL 60 - Programmsysteme mit insgesamt ca. 100 Unterprogrammen entstanden.

Das Entwerfen von ebenen und räumlichen Kurvenstücken wird durch UNIKUR ermöglicht. Die Stützkurven- bzw. Stützpunktverfahren werden mittels FLAKØN bzw. FLABES realisiert. Die grafische Ausgabe von Kurven und Flächen gelingt mit Hilfe von FGRAPH. Es können wahlweise orthogonale, zentralperspektivische oder isometrische Abbildungen erzeugt werden.

Die Programmsysteme sind für den sowjetischen Grossrechner BESM-6 sowie die Zeichenmaschinen DIGIGRAF 1008, DIGIGRAF 1016 /ČSSR/ und KINGMATIC 1830 HS /Norwegen/ ausgelegt. Einzelheiten zur rechentechnischen Realisierung sowie Beispiele für in den Rechner einzugebende Informationen sind [9] zu entnehmen. Zur organisatorischen Aufbereitung der geometrischen Vorgaben diverser Art haben sich die in den Tafeln 1, 3 und 5 angegebenen Kennzahlen bewährt. Nachdem der Rechner alle Punktinformationen nebst Kennzahlen eingelesen hat, fordert er die entsprechenden Daten zu den geometrischen Vorgaben an. Betrachtet sei das Beispiel zu Bild 14:

Nach Aufruf von UNIKUR werden in nachstehender Reihenfolge eingelesen:

- | | |
|--|-------------------|
| - Ordnung des Polynomansatzes | $\emptyset R = 5$ |
| - Anzahl der Stützpunkte | $n = 0$ |
| - Anzahl der Fixpunkte | $n_p = 2$ |
| - Anzahl der Tangentenbedingungen | $n_t = 2$ |
| - Anzahl der Krümmungsbedingungen | $n_{kr} = 2$ |
| - Koordinaten des ersten Fixpunktes P_1 | x_1, y_1 |
| - Kennzahl von P_1 | $KZ_1 = 8$ |
| - Koordinaten des zweiten Fixpunktes P_2 | x_2, y_2 |
| - Kennzahl von P_2 | $KZ_2 = 8$ |

- Tangentenanstieg in P_1	$T_1 = 0.5$
- Krümmung in P_1	$KR_1 = - 2$
- Tangentenanstieg in P_2	$T_2 = - 0.5$
- Krümmung in P_2	$KR_2 = 0$

Weitere Beispiele für UNIKUR - Datensätze sind den Bildern 1 bis 13 und 15 bis 26 zu entnehmen. Die Datensätze zu FLAKØN und FLABES sind nach dem gleichen Prinzip aufgebaut, bezüglich konkreter Anweisungen zur Datenerfassung bei allen Programmsystemen sei auf [9] verwiesen.

Bezüglich der Gewichtsvorgabe bei Stützpunkten sind folgende Erfahrungen gesammelt worden [61]:

Eine Gewichtsvorgabe von $GW = 50$ bewirkt im Falle einer Ausgleichung eine Verringerung der Verbesserung /Soll - Ist/ für den gewichteten Stützpunkt um eine Zehnerpotenz. Vorauszusetzen ist dabei, dass die Gewichte der Stützpunkte in der Umgebung des gewichteten Punktes nahe $GW = 1$ liegen.

Darüber hinaus werden in [61] weitere rechentechnische Erfahrungen vor allem im Hinblick auf die Approximation vorhandener Flächen vermittelt.

Sollen Kurven $y = f(x)$ bzw. Flächen $z = f(x, y)$ an einer Koordinatenachse bzw. Koordinatenhauptebene gespiegelt werden, ist dies unter Nutzung einfacher Spiegelungsprozeduren innerhalb von FGRAPH möglich. Die gleichen Prozeduren sind auch für die Spiegelung von Flächen in GAUSSscher Parameterdarstellung verwendbar. Der Entwurf von Rotationsflächen gelingt mit Hilfe von UNIKUR und FGRAPH.

Fliessen in den Flächenentwurfsansatz nichtlineare Bedingungen ein, so müssen zunächst im ersten Rechenschritt Näherungswerte der Unbekannten berechnet werden. Danach ermittelt man die Koeffizienten der nach TAYLOR linearisierten

Bedingungsgleichungen und führt diese in die Rechnung ein. Ungleichungen sind vorher in Gleichungen zu verwandeln, z. B. würde man im Falle von (D 23) schreiben:

$$3 a_3^2 - 8 a_2 a_4 = c \quad \text{mit} \quad c < 0$$

Die rechte Seite c kann dann entsprechend variiert werden.

Oft wird es jedoch im Flächenentwurfsprozess genügen, solche Bedingungen wie (D 23) zu kontrollieren. Sind im konkreten Fall beim Ansatz der Parabel vierter Ordnung Wendepunkte unerwünscht und der Rechner druckt die Mitteilung

$3 a_3^2 - 8 a_2 a_4 < 0$ bzw. eine entsprechende verbale Form aus, so kann man die Ausgabe des Lochstreifens für die Zeichmaschine veranlassen bzw. im anderen Falle unterbinden.

Unterprogramme zur numerischen Kontrolle der Einhaltung von geometrischen Vorgaben sind in den erwähnten Programmsystemen enthalten.

6. Anwendungen zu den Flächenentwurfsverfahren

Da eine ausführliche Beschreibung der möglichen Anwendungen zu den Kurven- und Flächenentwurfsverfahren im Rahmen dieser Arbeit zu viel Raum einnehmen würde und zudem auf [9] verwiesen werden kann, ist eine Auswahl von Anwendungen in den Tafeln 7 bis 11 zusammengestellt worden. Diese Tafeln bilden den Hauptinhalt des Gliederungspunktes 6. Ergänzend dazu seien noch einige anwendungsbedingte methodische Hinweise gegeben:

- Zum häufig angewandten Fall des Flächenentwurfs /vier vorgegebene Rand- bzw. Stützkurven/:
 Der Konstrukteur zeichnet mit Kurvenlinealen oder Straklatten in mindestens zwei Rissebenen der Erstentwurfszeichnung die Randkurven der Flächenstücke ein. Danach digitalisiert er diese Kurven punktweise nach einer gewissen Vorschrift /siehe [9] mit Hilfe eines Digitalisiergerätes /z. B. DIGITRON mit COORDIMETER F/, gibt über eine Tastatur die Kennzahlen für die Punkte ein und stellt auf dem gleichen Wege oder mit Hilfe eines Organisationsautomaten /DARO OPTIMA/ die notwendigen Daten für die geometrischen Vorgaben in maschinenlesbarer Form bereit. Der so erzeugte Datenträger wird in den Rechner eingegeben. Wahlweise können interessierende Zwischenergebnisse ausgedruckt werden, aus denen die SOLL-IST-Abweichungen der erzeugten Fläche zu den gemessenen Stützpunkten und die erwähnten Kontrollwerte für die geometrischen Vorgaben hervorgehen. Auf Abruf kann der Lochstreifen für eine Zeichenmaschine /DIGIGRAF oder KINGMATIC/ ausgegeben werden. Das graphische Produkt wird dem gewünschten Ergebnis schon sehr nahe kommen. Weitere Iterationsschritte müssen gegebenenfalls durch Präzisierung der Vorgaben oder weitere Flächensegmentierung und eventuelle Variation der Ordnung des Polynomansatzes folgen.

- Zur Entnahme der geometrischen Forderungen aus der Erstentwurfszeichnung:

Tangentenanstiege können leicht mit Hilfe von rechtwinkligen Stützdreiecken /z. B. angedeutet in den Bildern 14 und 15/ entnommen werden. Radien von Krümmungskreisen liest man unter Beachtung der Hinweise in 1.3. aus der im entsprechenden Punkt angelegten Kreisschablone ab. Zwei Kreisschablonen mit gebräuchlichen Radien sind im Anlagenteil zu finden.

Zeichnet der Konstrukteur eine asymmetrische Kurve vor, so gelingt es, die Asymmetrie mit Hilfe der Affinnormalen analytisch zu fassen.

Zu diesem Zweck werden im Punkt P_0 /siehe Bilder 3 und 23 bis 26/ mit horizontaler Tangente T_0 Parallelen zur Tangente T_0 eingezeichnet. Halbiert man die entstandenen "Sehnen", so ergeben die Halbierungspunkte eine Kurve. Die Tangente an diese Kurve im Punkt P_0 ist die Affinnormale.^x Der Anstieg der Affinnormalen wird wiederum aus einem rechtwinkligen Stützdreieck entnommen. Durch Verändern des Anstieges der Affinnormalen kann die Asymmetrie gesteuert werden. In oben genannten Bildern wurde für die Affinnormale Näherungsweise die ausgleichende Gerade durch die Halbierungspunkte gewählt.

- Zum Entwurf von Karosserieflächen auf der Grundlage der Stützkurvenverfahren /Tafel 8/:

Eine Autokarosserie lässt sich aus Streifenverbänden von Flächenstücken aufbauen [27]. Diese Streifenverbände, welche in Fahrt- oder Strömungsrichtung liegen, werden untereinander durch Kanten oder Sicken optisch getrennt und treffen quer zu der Fahrtrichtung in der Regel unter einem bestimmten Winkel auf. Dieser Knickwinkel kann über Tangentenvorgaben an den v-Kurven realisiert werden. Im allgemeinen ist

^{x)} siehe auch [24], S. 120

die Stetigkeit der Ableitungen an den Übergangsstellen quer zur Strömungsrichtung nicht erforderlich.

Hingegen werden in Fahrtrichtung Stetigkeiten bis zu möglichst hohen Ableitungen gefordert. Der in 2.3.1.3. und 2.3.1.4. vorgestellte Algorithmus /MOBIL/ trägt diesen grundsätzlichen Besonderheiten der Karosseriekonstruktion Rechnung. Wie im Abschnitt 2.3.2. bereits erläutert, garantiert der Algorithmus MOBIL in der Vorzugsrichtung eine Stetigkeit bis zur . Ableitung an den Übergangsstellen zwischen Nachbarflächenstücken. D. h. bei Polynomansätzen 4. und 5. Ordnung wird die Stetigkeit bis zur 2. Ableitung gewährleistet.

- Nach erfolgter Flächenkonstruktion kann prinzipiell auf Grund der nun bekannten Funktionen, deren Koeffizienten /bei Polynomansätzen/ auf Magnetband abgespeichert werden, durch Integration eine Oberflächen- bzw. Volumenberechnung angeschlossen werden.
- Zur Festlegung von Fräserwegen ist nach [20] die Berechnung der Hauptkrümmungsrichtungen ((D 33), (D 34), (D 37) zu empfehlen.

Nach diesen methodischen Hinweisen noch einige Erläuterungen zu in den Tafeln 7 bis 11 ebenfalls angedeuteten Anwendungen ausserhalb des AUTEVO-Komplexes. Vor allem sei hier die prinzipielle Anwendbarkeit der Flächenentwurfsverfahren für die Zwecke des DIGITALEN GELÄNDEMODELLS /DGM/ herausgestellt. Wie aus zahlreichen Veröffentlichungen ([15], [16], [18] und [63] bis [70]) hervorgeht, hat das DGM bei der Projektierung im Bau- und Markscheidewesen und Verkehrswegebau einen festen Platz erobert. Die in dieser Arbeit vorgestellten und auch für die Zwecke der numerischen Beschreibung grundsätzlich geeigneten Algorithmen können zu einer weiteren Rationalisierung der Projektierungsverfahren beitragen.

Ferner wird in den Tafeln 7 bis 11 die Anwendbarkeit der erarbeiteten Algorithmen für die Zwecke der zweidimensionalen Interpolation in den verschiedensten Wissensgebieten ausgewiesen. So wurden die Algorithmen zur Ableitung des Trends bei rezenten Erdkrustenbewegungen ([17], [19]) und zur Ermittlung ebener Spannungszustände [62] an Maschinenelementen eingesetzt.

Für Projektierungszwecke im Bauwesen /Spezialrichtung Flächen-tragwerke/ wurden Hyparschalen /Hyperbolisches Paraboloid/ numerisch beschrieben bzw. konstruiert und Kombinationen von Hyparschalen digitalgraphisch dargestellt /siehe Anlagen zu [9]/.

Offensichtlich kann man keine scharfe Trennung in Anwendungen "innerhalb" und "ausserhalb" des Komplexes der Automatisierung bzw. Rationalisierung der technischen Produktionsvorbereitung vornehmen. Projektierungsarbeiten im Bauwesen kann man auch zum AUTEVO-Komplex zählen. Das gleiche gilt für die mathematische Nachbildung von Körperteilen zur Vorbereitung von Prothesenherstellungen für medizinische Zwecke.

In der Einleitung sind die Hauptanwendungsgebiete zum rechnergestützten Entwurf von doppelt gekrümmten Flächen bereits umrissen worden. Die letzten Ausführungen in diesem Abschnitt sollen dazu dienen, auch auf weniger geläufige, aber durchaus denkbare Anwendungsmöglichkeiten aufmerksam zu machen.

7. Zusammenfassung

Dem gesetzten Ziel angepasst, wurde das sog. Ansatzverfahren entwickelt. Dieses Verfahren, welches in seinen Grundzügen im Abschnitt 1 vorgestellt wird, durchzieht mehr oder weniger alle in den Abschnitten 2 bis 4 diskutierten mathematischen Lösungen und ermöglicht erstmals die Einhaltung von differentialgeometrischen Vorgaben höherer Ordnung an Kurven- und Flächenpunkten. Die Gesamtheit der einflussenden geometrischen Vorgaben bestimmt den Charakter einer Kurve oder einer zu entwerfenden Fläche. Das Manipulieren mit geometrischen Vorgaben im Dienste einer geometrischen Qualitätssteigerung und zur Abkürzung des Iterationsprozesses beim Kurven- und Flächenentwurf betont das konstruktive Element des Entwurfsprozesses und kommt dem Bestreben des Konstrukteurs entgegen, Kurven- und Flächenformen nach seinem Willen zu steuern. Das Ansatzverfahren ist für den Konstrukteur ein wertvolles Hilfsmittel zur Beherrschung der Formenvielfalt doppelt gekrümmter Flächen. Es wurde im Interesse der Konstrukteure versucht, das prinzipielle Herangehen und die mathematische Lösung im einzelnen systematisch darzulegen und eine überschaubare Theorie zu entwerfen.

Nach der Bereitstellung von differentialgeometrischen Kenntnissen über elementare Ansatzfunktionen werden im Abschnitt 2 die Stützkurvenverfahren erläutert. Je nach Verwendungszweck kann sich der Konstrukteur in der Erstentwurfszeichnung ebene Stützkurven vorgeben. Als geometrische Vorgaben sind Fixpunkte, Tangentenanstiege, Krümmungen, Extremalstellen, Wendepunkte, Art des Schmiegekegelschnittes und Anstieg der Affinnormalen zugelassen. Die in zwei Rissebenen fixierten Stützkurven bilden das Gerüst für die zu entwerfende Fläche, welche in der Form $z = f(x, y)$ bereitgestellt wird. Der Übergang zur GAUSSschen Parameterdarstellung ist möglich. Die Bogenlänge von Raumkurven wird dabei durch die Sehnenpolygonzuglänge angenähert.

Die Stützpunktverfahren /Abschnitt 3/ führen auf direktem Wege zur Darstellung $z = f(x, y)$. Als Vorgaben sind Fixpunkte, Tangentenanstiege und Krümmungen in x- und y-Richtung sowie elliptische, parabolische und hyperbolische Punkte bei horizontaler Tangentialebene vorgesehen.

Möglichkeiten zum Zusammenschluss von Flächenstücken werden diskutiert, prinzipielle Wege zur separaten Konstruktion von Rand- und Flächenkurven sowie zur Superposition von Flächen vorgeschlagen.

Im Anschluss an Erläuterungen zur rechentechnischen Realisierung folgen im Abschnitt 6 praktische Hinweise zur Flächenkonstruktion. Im gleichen Abschnitt wird auch auf Anwendungsmöglichkeit ausserhalb von AUTEVO /Physik, Geophysik, Geodäsie, Meteorologie, Bau-, Markscheidewesen, ingenieurwissenschaftliches Versuchswesen, Territorialplanung, Medizin/ für die Zwecke der Beschreibung von körperlichen Modellen oder theoretischen Flächen und der zweidimensionalen Interpolation hingewiesen.

Um der Forderung nach einfacher rechentechnischer Handhabung entgegen zu kommen, konzentriert sich das Ansatzverfahren hauptsächlich auf Polynomansätze beliebiger Ordnung. Als wertvolles Hilfsmittel erweist sich dabei die Ausgleichsrechnung. In Übereinstimmung mit Schlussfolgerungen aus den differentialgeometrischen Untersuchungen im Abschnitt 1 garantieren auch nach rechentechnischen Erfahrungen Polynomansätze vierter und fünfter Ordnung die besten Ergebnisse beim Kurven- und Flächenentwurf hinsichtlich Formflexibilität und Anpassungsvermögen an die Vorgaben verschiedener Art.

Aus ersten praktischen Anwendungen geht hervor, dass man beim Entwurf von komplizierten doppelt gekrümmten Formen unter Verwendung von Polynomansätzen vierter und fünfter Ordnung etwa mit einem Drittel der Flächensegmentanzahl auskommt, welche sonst bei dritter Ordnung nötig wäre.

Die in den vorangegangenen Kapiteln geschilderte grundsätzliche Vorgehensweise zeichnet sich durch wesentliche Unterscheidungsmerkmale zu bekannten Methoden, insbesondere zu den Arbeiten von COONS [14] und BEZIER [7] aus. U. a. wird auch eine Speziallösung zur Auszeichnung einer Vorzugs- bzw. Strömungsrichtung erarbeitet.

Die vorgeschlagenen Lösungswege einschliesslich ihrer rechen-technischen Realisierung sind ein Beitrag zur Rationalisierung des Entwurfsprozesses doppelt gekrümmter Flächen bzw. Teile.

Literatur

- [1] Werler, K. H.:
Mathematik und rechentechnische Probleme im Forschungsvorhaben AUTEVO.
Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Heft 3/4 - 1972, S. 163-178.
- [2] Schröder, E.:
Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung.
Elemente der Mathematik 25, S. 7-13. /1970/
- [3] Baule, B.:
Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Band VII: Differentialgeometrie.
6. Auflage Leipzig: S. Hirzel Verlag 1965.
- [4] Haack, W.:
Differential-Geometrie. Teil I und II.
Wolfenbütteler Verlagsanstalt GmbH. Wolfenbüttel und Hannover, 1948.
- [5] Strubecker, K.:
Differentialgeometrie II.
Sammlung Götschen, Band 1179/1179a, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1968.
- [6] Nauck, W.:
Forschungsbericht über das System FOMAT.
VEB Carl Zeiss JENA, 1973.
- [7] Bezier, P.:
Emploi des Machines à Commande Numerique.
Masson & C^e, Editeurs, Paris 1970
- [8] Forrest, A. R.:
Mathematical principles for curve and surface representation.
Curved Surfaces in Engineering. Conference, 15-17th March 1972, Churchill College, Cambridge, England.
Published by IPC Science and Technology Press Ltd.

- [9] Bonitz, P.: Abschlussbericht zum F/E-Thema 19.19.0.03.16 "Algorithmen zum Entwurf doppelt gekrümmter Flächen".
Technische Universität Dresden, Sektion Geodäsie und Kartographie, Dresden, 1975.
- [10] Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.
Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968.
- [11] Bonitz, P.: Programmbibliothek zur Ausgleichungsrechnung.
Dokumentation in der Anlage zum Zwischenbericht zum F/E-Thema 19.19.0.03.16,
Technische Universität Dresden, Sektion Geodäsie und Kartographie, Dresden, 1972.
- [12] Bonitz, P.: R-300- und BESM-6-ALGOL-Programme für die Ausgleichungsrechnung.
Vermess.-Techn. 20 /1972/ 8, S. 304.
- [13] Bonitz, P.: Einführung in ALGOL 60 nebst Anwendungsbeispielen aus der Geodäsie.
Vermess.-Techn. 19 /1971/ 9, 11, 12, 20 /1972/ 2, 4.
- [14] Coons, S. A.: Surfaces for computer-aided design of space forms.
Technical Report MAC-TR-41, M.I.T. Cambridge, Mass., June, 1967.
- [15] Silar, F.: Das digitale Geländemodell - Theorie und Praxis.
Vermess.-Techn. 20 /1972/ 9, S. 327-329.
- [16] Grejsuch, V. L., Kosmin, V. V.: Analitičeskoe predstavlenie reliefa mestnosti v ECVN.
Izv. vysš. uceb. Zaved., Geod. i aerofotosemka, Moska 1964/6, S. 57-64.

- [17] Bonitz, P.: Mehrdimensionale Interpolation.
Neuerervorschlag an der Technischen Universität Dresden,
Reg.Nr. 19/039/73, Dresden, 1973.
- [18] Šima, J.: Prinzipien des ČS-digitalen Geländemodells.
Vermess.-Techn. 20 /1972/ 2,
S. 48-51.
- [19] Hoyer, R.: Beitrag zur Auswertung von Wiederholungsnivellements.
Dissertation, Technische Universität Dresden, Sektion Geodäsie und Kartographie, Dresden, 1975.
- [20] Schwegler, H.: NC-Fräsen gekrümmter Flächen.
Forschungsbericht aus dem Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen der Universität Stuttgart.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1972.
- [21] Reissmann, G.: Die Ausgleichungsrechnung.
2. Auflage Berlin:
VEB Verlag für Bauwesen, 1967.
- [22] Schröder, E.: Differentialgeometrie.
Vorlesung im FS 1969, Technische Universität Dresden.
- [23] Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 2.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.
- [24] Kruppa, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie.
Springer-Verlag, Wien, 1957.
- [25] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik.
8. Auflage Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1967.

- [26] Schröder, E.:
Darstellende Geometrie.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974.
- [27] Schupp, W.:
Karosseriebau.
Vorlesung im FS 1973,
Technische Universität Dresden.
- [28] Alexandrow, A. D.:
Kurven und Flächen.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
- [29]
Automatisches Zeichnen.
AUTEVO-Informationsreihe,
Jena, 1972.
- [30]
Anwender-Information
Programmsystem DIGRA.
Institut für Schiffbau, Rostock-
Rechenzentrum, Rostock, 1971.
- [31] Pfützner, G.:
Information über das mittlere
Programmsystem AUGDAT/ZEIMA.
Institut für Schiffbau, Rostock-
Rechenzentrum, Rostock, 1972.
- [32] Günther, K.:
Anwenderdokumentation für das
System ESGE/F, Systembaustein
STRAKEN.
Institut für Schiffbau, Rostock,
1971.
- [33] Kochan, D.,
Strempel, H.:
Programmgesteuerte Werkzeug-
maschinen und ihr Einsatz.
2. Auflage Berlin:
VEB Verlag Technik 1967.
- [34]
Sprachbeschreibung AUTOTECH/SYMAP
B02/FR2
Forschungszentrum des Werkzeug-
maschinenbaues Karl-Marx-Stadt
im VEB Werkzeugmaschinenkombinat
"Fritz Heckert", Karl-Marx-Stadt,
1974.
- [35] Eckel, W.:
Austragung und Konstruktion im
Karosserie- und Zellenbau.
VEB Verlag Technik, Berlin, 1953.

- [36] Carlberg, E. F.,
Childs, J.J.: Boeing Expands N/C Contouring
Capability.
MACHINE and TOOL BLUE BOOK,
January, 1963.
- [37] Shu, H.,
Hori, S.,
Mann, W. R.,
Little, R. N.: The synthesis of sculptured
surfaces.
Numerical Control Programming
Languages.
North-Holland-Publishing Company,
Amsterdam, London, 1970.
- [38] Böhm, W.: Zur Darstellung von Flächen in
der Datenverarbeitung.
Angewandte Informatik 8/71,
S. 373-380.
- [39] Böhm, W.: Datenstrukturen für die Erfassung
von Flächen.
Angewandte Informatik 9/71,
S. 419-423.
- [40] Wilfert, H. G.,
Weber, H.: Geometrische Datenverarbeitung
Karosseriebau.
Automobiltechnische Zeitschrift
75 /1973/ 3.
- [41] Gould, S. S.: Surface programs for numerical
control.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [42] Bates, K. J.: The AUTOKON AUTOMOTIVE and AERO-
SPACE packages.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [43] Sabin, M.: Numerical Master Geometry.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [44] Armit, A.P.: Interactiv 3 D shape design -
MULTIPATCH and MULTI-OBJECT.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [45] Yuille, I. M.: Ship design.
gleiche Konferenz wie bei [8].

- [46] Bézier, P.: Numerical control in automobil design and manufacture of curved surfaces.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [47] Freemantle, A. C.,
Freeman, P. L.: The evolution and application of lofting techniques at Hawker Siddeley Aviation.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [48] Walker, L. F.: Curved surfaces in ship-building design and production.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [49] Davy, D. W.: Surface manipulation and press tool engineering in car body maintenance.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [50] Hart, W. B.: Current and potential applications to industrial design and manufacture.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [51] Newell, R. G.: The visualization of three-dimensional shapes.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [52] Sabin, M.: Numerical Master Geometry system demonstration.
gleiche Konferenz wie bei [8].
- [53] Flutter, A. G.: The POLYSURF System.
Vortrag auf der 2. PROLAMAT-Konferenz, Budapest, 1973.
- [54] Bézier, P.: UNISURF System.
Principles, Programme, Language.
gleiche Konferenz wie bei [53].
siehe auch [7].
- [55] Yoshihiro Hyodo: HAPT-3 D: A Programming System for Numerical Control.
gleiche Konferenz wie bei [53].
- [56] Ghezzi, C.,
Tisato, F.: Interactive Computer-Aided Design of Sculptured Surfaces.
gleiche Konferenz wie bei [53].

- [57] Mehlum, E.,
Melhuus, H.,
Ljunggren, S.:
AUTOKON / AEROSPACE,
AUTOKON / AUTOMOTIVE.
gleiche Konferenz wie bei [53].
- [58] Sandin, K. E.:
FORMELA - A Programm System for
Computer-Aided Design and Produc-
tion.
gleiche Konferenz wie bei [53].
- [59] Landmark, A.:
AUTOKON 71 - A Tool in Ship
Design and Production.
gleiche Konferenz wie bei [53].
- [60] Späth, H.:
Spline - Algorithmen zur Kon-
struktion glatter Kurven und
Flächen.
R. Oldenbourg Verlag, München,
Wien, 1973.
- [61] Emmerich, G.:
Erprobung der Programmsysteme
FLABES und FLAKON zur numerischen
Beschreibung von doppelt gekrümm-
ten Flächen am Beispiel eines
Teiles einer Schiffskörperober-
fläche.
Diplomarbeit, Technische Univer-
sität Dresden, Sektion Geodäsie
and Kartographie, Dresden, 1974.
- [62] Strauss, P.:
Automatische Auswertung photo-
grammetrischer Verschiebungs-
messungen zur Ermittlung ebener
Spannungszustände.
Diplomarbeit, Hochschule für Ver-
kehrswesen "Friedrich List" Dres-
den, Sektion Fahrzeugtechnik,
Dresden, 1974.
- [63] Grist, M.:
Numerische Geländemodelle:
Rechenschaftsbericht von den
letzten Untersuchungen.
Photogramm, Rec., London /1972/
X, S. 424-441.
- [64] Blaschke, W.:
Numerische Geländemodelle MIT.
Société, Francaise de Photo-
grammetrie. Bulletin /1967/ 27,
S. 37-40.

- [65] Vitta, E.: Anwendung der Flächenmethode in Finnland.
Société, Française de Photogrammetrie. Bulletin /1967/ 27, S. 44-56.
- [66] Halleman, B.: Darstellung des Geländes mit der Methode Nordisk ADB.
Société, Française de Photogrammetrie. Bulletin /1967/ 27, S. 57-60.
- [67] Deligny, J. L.: Methode der Punktnester - Französische Programme der elektronischen Berechnung von Trassen.
Société, Française de Photogrammetrie. Bulletin /1967/ 27, S. 61-67.
- [68] Benner, E.: Über das digitale Geländemodell.
Material des XII. Kongresses der Internationalen Photogrammetrischen Gesellschaft in Ottawa 1972.
- [69] Linkwitz, K.: Digitale Geländemodelle.
Bildmess. u. Luftbildwes., Karlsruhe /1970/ 1, S. 76-84.
- [70] Lauer, S.: Anwendung der skalaren Prädiktion auf das Problem des numerischen Geländemodells.
Nachr. Karten- u. Vermess.-Wes., R. I, /1972/ 51.

Messdaten und Vorgaben	Symbolik	Kenn- zahl	Anzahl der		Wertig- keit W
			VG1	BG1	
gemessener Stützpunkt	S	1	1	0	≤ 1
Fixpunkt	P	2	0	1	1
Anstiegsvorgabe	T	3	0	1	1
Krümmungsvorgabe	KR	31	0	1	1
Affinnormalenvorgabe	AN	32	0	1	1
Kombination A	S \wedge T	4	1	1	≤ 2
" B	P \wedge T	5	0	2	2
" C	S \wedge T \wedge KR	7	1	2	≤ 3
" D	P \wedge T \wedge KR	8	0	3	3
Maximum (P _{max})	P \wedge T _n \wedge KR	81	0	3	3
Minimum (P _{min})	P \wedge T _n \wedge KR	82	0	3	3
Wendepunkt (P _w)	P \wedge T \wedge KR _n	83	0	3	3
Kombination E	S \wedge T \wedge KR \wedge AN	9	1	3	≤ 4
Kombination F	P \wedge T \wedge KR \wedge AN	10	0	4	4

Legende für die Tafeln 1 und 2 sowie die Bilder 1 bis 26:

$$T_n = 0$$

$$KR_n = 0$$

ΣW : Gesamtwertigkeit

M : Krümmungsmittelpunkt

ρ : Krümmungsradius

T a f e l 1

Symbolik zum Entwurf ebener Kurven

E n t w u r f e b e n e r K u r v e n							
Standard- vorgaben	$\emptyset R$	u	u_{red}	Ausgewählte Beispiele von Kombinationen aus Stützpunkten und Vor- gaben	$n > (u_{red} - r)$	$n = (u_{red} - r) / \sum W$	Bild Nr.
keine	5	6	6	$S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_9 \wedge P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1$	x		6 1
	2	3	3	$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3) V$		x 3	4
				$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) V$		x 3	4
				$(P_1 \wedge T_1 \wedge P_2) V$		x 3	5
				$(P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1)$		x 3	6
	3	4	4	$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4) V$		x 4	7
				$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) V$		x 4	7
				$(P_1 \wedge T_1 \wedge P_2 \wedge T_2) V$		x 4	8
				$(P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1 \wedge P_2)$		x 4	9
	4	5	5	$(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_5) V$		x 5	10
				$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_5) V$		x 5	10
				$(P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1 \wedge P_2 \wedge T_2) V$		x 5	11
				$(S_1 \wedge P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1 \wedge P_2)$		x 5	12
	5	6	6	$(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_6) V$		x 6	13
				$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_6) V$		x 6	13
				$(P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1 \wedge P_2 \wedge T_2 \wedge KR_2) V$		x 6	14
				$(S_1 \wedge S_2 \wedge P_1 \wedge T_1 \wedge P_2 \wedge T_2)$		x 6	15
$P_0 \wedge T_0$ ΔKR_0 mit $x_0 = T_0 = 0$	5	6	3	$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_6 \Delta T_1$	x		3 2
	2	3	0	-		x 0	16
	3	4	1	$S_1 V P_1$		x 1	17
	4	5	2	$(S_1 \wedge S_2) V$		x 2	18
				$(P_1 \wedge P_2) V$		x 2	18
				$(P_1 \wedge T_1)$		x 2	19
	5	6	3	$(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3) V$		x 3	20
				$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) V$		x 3	20
				$(S_1 \wedge P_1 \wedge T_1) V$		x 3	21
				$(P_1 \wedge T_1 \Delta KR_1)$		x 3	22

Fortsetzung von Tafel 2

Standard- vorgaben	$\emptyset R$	u	u_{red}	Ausgewählte Beispiele von Kombinationen aus Stützpunkten und Vor- gaben	$n > (u_{red-r})$	$n = (u_{red-r})$ ΣW	Bild-Nr.
$P_O \Delta T_O$ $KR_O \Delta$ AN_O mit $x_O = T_O = 0$	5	6	2	$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_5$	x	2	3
	3	4	0	-		x 0	23
	4	5	1	$S_1 \vee P_1$		x 1	24
	5	6	2	$(S_1 \Delta S_2) \vee$		x 2	25
				$(P_1 \Delta P_2) \vee$		x 2	25
				$(P_1 \Delta T_1)$		x 2	26
	6	7	3	$(S_1 \Delta S_2 \Delta S_3) \vee$		x 3	-
				$(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3) \vee$		x 3	-
				$(P_1 \Delta T_1 \Delta P_2) \vee$		x 3	-
				$(P_1 \Delta T_1 \Delta KR_1)$		x 3	-

Messdaten und Vorgaben	Symbolik	Kennzahl	Anzahl der		Wertigkeit
			Vgl	Bgl	
gemessene x-Koord.	SX	11	1	0	≤ 1
" y-Koord.	SY	12	1	0	≤ 1
" z-Koord.	SZ	13	1	0	≤ 1
gemessener Stützpunkt	S : SX Δ SY Δ SZ	1	3	0	≤ 3
feste x-Koord.	PX	21	0	1	1
" y-Koord.	PY	22	0	1	1
" z-Koord.	PZ	23	0	1	1
vorgegebener Fixpunkt	P : PX Δ PY Δ PZ	2	0	3	3
x-Anstieg	TX	31	0	1	1
y-Anstieg	TY	32	0	1	1
z-Anstieg	TZ	33	0	1	1
Tangentenvektor	T : TX Δ TY Δ TZ	3	0	3	3
x-Anstiegsänderung	KX	41	0	1	1
y- "	KY	42	0	1	1
z- "	KZ	43	0	1	1
Betrag der Krümmung	KR : KX Δ KY Δ KZ siehe auch (*)	4	0	3	3
Kombination A	S Δ T	5	3	3	≤ 6
" B	P Δ T	6	0	6	6
" C	S Δ T Δ KR	7	3	6	≤ 9
" D	P Δ T Δ KR	8	0	9	9
rel. x- } Extremum (*)	P Δ TX Δ KR	81	0	7	7
rel. y- }	P Δ TY Δ KR	82	0	7	7
rel. z- }	P Δ TZ Δ KR	83	0	7	7
x-Wendepunkt	P Δ T Δ KX _n	84	0	7	7
y-Wendepunkt	P Δ T Δ KY _n	85	0	7	7
z-Wendepunkt	P Δ T Δ KZ _n	86	0	7	7

Legende:

$$T : \vec{t}^T = \left(\frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds} \right) = (TX \quad TY \quad TZ) \quad (*) \text{ wenn } KX \text{ bzw. } KY \text{ bzw. } KZ \neq 0$$

$$KR = |\vec{t}'(s)| = |x''(s)| = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{wobei } (\vec{t}(s))^T = \left(\frac{d^2x}{ds^2} \quad \frac{d^2y}{ds^2} \quad \frac{d^2z}{ds^2} \right) = (KX \quad KY \quad KZ)$$

mithin

$$KR = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}$$

(*) $KR \geq 0$
bei Raumkurven!

T a f e l 3

Symbolik zum Entwurf von Raumkurven

Ausgewähltes Beispiel für lokale Vorgaben in einem ausgezeichneten Punkt der Raumkurve

Mit der Symbolik aus Tafel 3 sei die Vorgabenkombination $D = (P \Delta T \Delta KR) = (PX \Delta PY \Delta PZ \Delta TX \Delta TY \Delta TZ \Delta KX \Delta KY \Delta KZ)$ angesetzt.

Folglich:

$$\begin{aligned}
 \vec{t}^T &= (TX \quad TY \quad TZ) \\
 KR &= \sqrt{(KX)^2 + (KY)^2 + (KZ)^2} \\
 \rho &= \frac{1}{KR} \\
 \vec{n} &= \rho \cdot \begin{pmatrix} KX \\ KY \\ KZ \end{pmatrix} \\
 \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ TX & TY & TZ \\ \rho \cdot KX & \rho \cdot KY & \rho \cdot KZ \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Somit begleitendes Vektordreiein \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} bekannt.

Messdaten und Vorgaben	Symbolik	Kennzahl	Anzahl der		Wertig- keit
			VGL	BGL	
gemessener Stützpunkt	S	1	1	0	≤ 1
Fixpunkt	P	2	0	1	1
Anstieg in x-Richtung	TX	3	0	1	1
Anstieg in y-Richtung	TY	6	0	1	1
Krümmung in x-Richtung	KX	31	0	1	1
Krümmung in y-Richtung	KY	32	0	1	1
Kombination A	S Δ TX	4	1	1	≤ 2
B	P Δ TX	5	0	2	2
C	S Δ TY	7	1	1	≤ 2
D	P Δ TY	8	0	2	2
E	S Δ TX Δ TY	9	1	2	≤ 3
F	P Δ TX Δ TY	10	0	3	3
G	S Δ TX Δ KX	11	1	2	≤ 3
H	P Δ TX Δ KX	12	0	3	3
I	S Δ TY Δ KY	13	1	2	≤ 3
J	P Δ TY Δ KY	14	0	3	3
K	S Δ TX Δ TY Δ KX Δ KY	15	1	4	≤ 5
L	P Δ TX Δ TY Δ KX Δ KY	16	0	5	5
Maximum (P_{\max})	P Δ TX _n Δ TY _n Δ KX Δ KY	17	0	5	5
Minimum (P_{\min})	P Δ TX _n Δ TY _n Δ KX Δ KY	18	0	5	5

Legende siehe Tafel 6

T a f e l 5

Symbolik zum Entwurf von Flächen
(Stützpunktverfahren)

Ansatz	$\emptyset R$	$\emptyset RF$	u	Kombination von Stützpunkten und Vorgaben	$n \geq (u-r)$	$n = (u-r)$	ΣW
Flächen- segment	1	2	4	$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_n, n \geq 4$	x		4
	2	4	9	Kombination L Δ $S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_n, n \geq 4$	x		9
	3	6	16	3mal Kombination L Δ $S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_n, n \geq 1$	x		16
	4	8	25	5mal Kombination L		x	25
Flächen- polynom	1*	1	3	$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_n, n \geq 3$	x		3
	2	2	6	$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_n, n \geq 6$	x		6
	3	3	10	Kombination L Δ $S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_n, n \geq 5$	x		10
	4	4	15	3mal Kombination L		x	15
	5	5	21	4mal Kombination L ΔS_1		x	21

* (Ebene)

Legende zu Tafel 5 und 6:



$$TX_n = TY_n = 0$$

ΣW : Gesamtwertigkeit









T a f e l 6

Ausgewählte Beispiele zum Stützpunktverfahren mit
geometrischen Vorgaben (Abschnitt 3.)

Anwendungsbeispiele zum Entwurf von ebenen Kurven


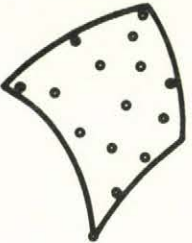
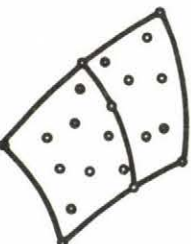
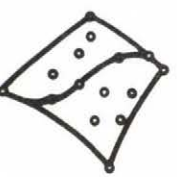
Gliederungs- punkt	Bild-Nr.	mögliche Anwendung innerhalb von AUTEVO	vorwiegend ausserhalb
2.1.2.1. keine Standard- vorgaben	1 und 4 bis 15 siehe auch Tafel 2	Kurvenentwurf belie- biger Art, Aneinander- setzen von Kurven- stücken bei Gewähr- leistung der Stetig- keit bis zur 2. Ablei- tung möglich.	Interpola- tionsaufga- ben ver- schiedener Art
2.1.2.2. Standard- vorgaben Anf.pkt. hor.Anf.t. Anf.kr.	2 und 16 bis 22 siehe auch Tafel 2	Entwurf von charakte- ristischen Kurven oder Profilen quer zur Sym- metrale einer Fläche. z. B. Querschnitt am Autodach oder Spant eines Schiffes 	Interpola- tionsaufga- ben mit ent- sprechenden Nebenbedin- gungen
2.1.2.3. Erweiterung von 2.1.2.2. um die Stand. vorg. Affinnor- male	3 und 23 bis 26 siehe auch Tafel 2	Entwurf von charakte- ristischen asymmetri- schen Kurven, der An- stieg der Affinnormalen steuert die Asymmetrie. z. B. Längsschnitt durch ein Autodach: 	
2.1.2.4. Spiegelung		Spiegelung char. Quer- schnittskurven an den Koordinatenachsen, z.B. Spiegelung an Mitttelebene Grundriss in Fahrtrichtung bei Fahrzeugen versch.Art	
2.2. Drehflächen	27	Entwurf von Rotations- körpern beliebiger Art, z.B. aus der Glas-, Keramik- u. Porzellan- industrie /Flaschen, Gläser, Vasen/	

Anwendungsbeispiele zu den Stützkurvenverfahren

Glieder.pkt. ... ggf. in Zusammenh. mit 2.4.	Bild-Nr. 	mögliche Anwendungen vorwiegend innerhalb von AUTEVO ausserhalb
2.3.1.1. 2 Stützk. /Schiebfl./ Leitkurve/ Erzeugende Kurve/	28 	Entwurf von Fahrzeug- aussenhautteilen /z. B. Autodach/, Flächentrag- werke, Teile von Gerä- teverkleidungen
2.3.1.2. 3 Stützk.	29 	wie bei 2.3.1.1.
2.3.1.3. 4 Stützk.	30 	wie 2.3.1.1., dieser Fall wird am häufigsten bei Flächen- entwürfen angewendet, der Konstrukteur gibt 4 Randkurven vor, der Rechner erzeugt daraus die Fläche.
2.3.1.4. mehr als 4 Stützk.	31 	wie 2.3.1.1.
2.3.1.5. Spiegelung	32 	bei allen symmetrischen Flächen bzw. Körpern /Auto, Boot, Schiff, Flugzeug/
2.3.2. Zusammen- schluss zum Streifen- verband	33 	bei allen Flächen u. Körpern, die sich aus Streifenverbänden auf- bauen lassen, z. B. Autokarosserie, Pro- pellerblatt
2.3.3. Separate Konstr. von Rand-u. Flächen- kurven	34, 35 	Erzeugen von Randkurven durch Schnitt von zwei Flächen, z.B. Schnitt zwischen Motorhaube und Windschutzscheibe oder zwischen 2 Flächentrag- werken

Es sind sowohl **ebene** als auch räumliche Stützkurve zugelassen.

Anwendungsbeispiele zu den Stützpunktverfahren

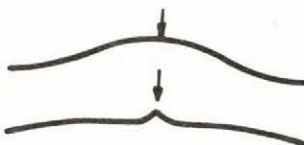

Gliederungs- punkt	Bild-Nr. 	mögliche Anwendung innerhalb von AUTEVO	vorwiegend ausserhalb
3.2. und 3.3. Flächen- segment- und Flächen- polynom- ansatz	39 	Entwurf von diversen Modelloberflächen auf Grund von Stütz- punktdaten u. geometr. Vorgaben, z.B. Verkleidungen von Elektrogeräten bei Vorgabe von Fix- punkten, die durch den Innenaufbau be- dingt sind /Bügeleisen, elektri- sche Messgeräte, Schutzkappen, o.ä./.	Messdatenaus- wertung durch zweidimensio- nale Interpola- tion, DIGITALES GELANDEMODELL prinzipiell gleiche An- wendungsgebie- te wie bei den Stützkurven- verfahren
3.5. Zusammen- schluss mehrerer Flächen- stücke	33 	siehe oben	siehe oben
3.6. Separate Konstr. von Rand- u. Flächen- kurven	34, 35 	siehe oben, Erzeugen von Rand- bzw. Flächenkurven durch Schnitt zweier vorgegebener Flächen	siehe oben, z.B. Berech- nen von be- stimmten Pro- filen oder Trassen über vorgegebenem Grundriss

• gemessene Stützpunkte oder vorgegebene Fixpunkte

Anwendungsbeispiele zum Entwurf von Raumkurven

Gliederungs- punkt	Bild-Nr.	mögliche Anwendung vorwiegend	
		innerhalb von AUTEVO	ausserhalb
2.4.1. räumliche Stützkurven	38	Entwurf von Erzeugenden- und Leitkurven für die Stützkurvenverfahren	Stückweise Beschreibung von Bewe- gungsvor- gängen auf räumlichen Bahnkurven

T a f e l 10

Gliederungs- punkt	Bild-Nr.	mögliche Anwendungen vorwiegend	
		innerhalb von AUTEVO	ausserhalb
4.1. $z = f(x, y)$	45 bis 50	<p>Überlagerung von Primär- flächen mit ausgewählten Sekundärflächen /z. B. Zylinderflächen/, um z. B. die Gratlinie einer Karosseriefläche /Motorhaube, Heckklappe/ hervorzuheben.</p> <p>Grat- oder Kammlinie</p>  <p>Auch Erzeugen von flä- chenhaften Vertiefungen in Karosserieflächen</p> 	Überlagerung verschiede- ner Komponen- ten bei Mess- datenanaly- sen, Addi- tion von Korrektur- flächen bei numerischen Beschreibun- gen von Mo- dellen
4.2. $x = x(u, v)$	51. 52	wie 4.1., darüber hinaus Auf- Setzen von Sicken und lokal begrenzten Erhe- bungen auf Karosserie- flächen	

T a f e l 11

Anwendungsbeispiele zur Superposition

Fall $n > (u_{\text{red}} - r)$

(gilt für Bild 1 bis 3)

wobei $u_{\text{red}} = u$, wenn keine
Standardvorgaben

Standardvorgaben: keine

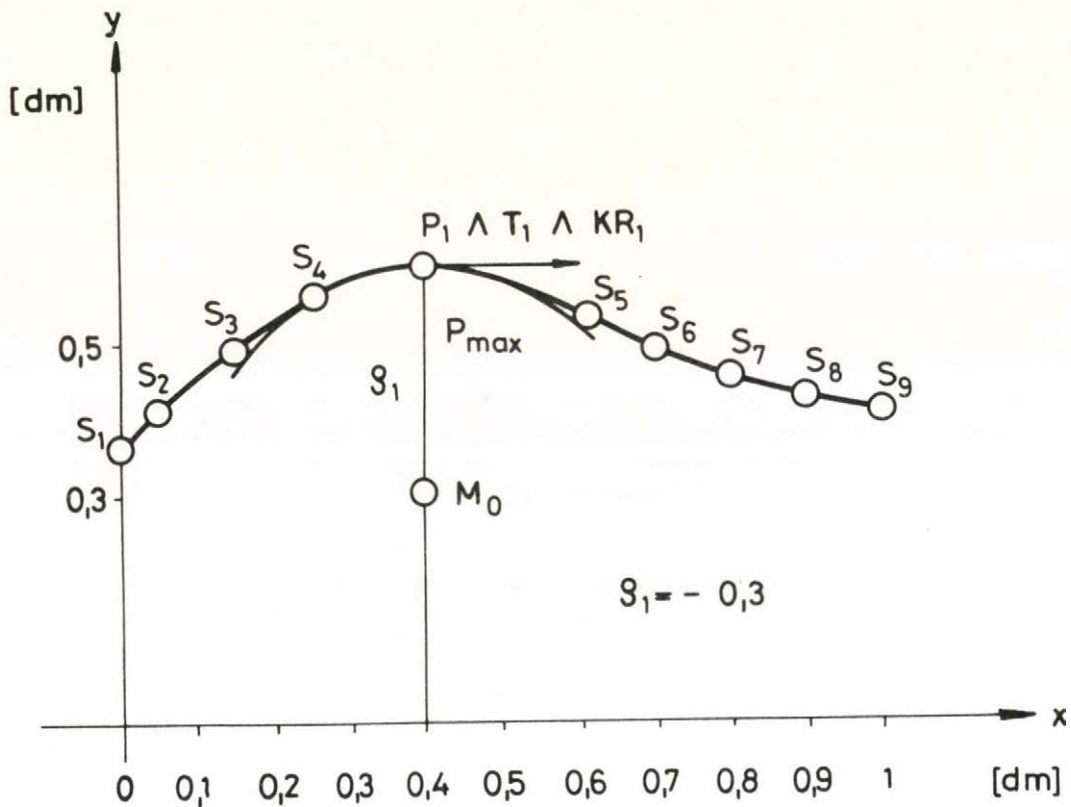
$\emptyset R = 5$ $n = 9$

$u = 6$ $r = 3$

$u - r = 3$

} $\Rightarrow n > (u - r)$

Stützpunkte und Vorgaben: $S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_9 \Delta P_1 \Delta T_1 \Delta KR_1$



Daten:

$\emptyset R = 5$

$n = 9$

$n_p = 1$

$n_t = 1$

$n_{kr} = 1$

	x	y	KZ
S_1	0	0.36	1
S_2	0.05	0.41	1
S_3	0.15	0.49	1
S_4	0.25	0.56	1
S_5	0.61	0.53	1
S_6	0.7	0.49	1
S_7	0.8	0.45	1
S_8	0.9	0.42	1
S_9	1	0.4	1
P_1	0.4	0.6	8
T_1			
KR_1			

$T_1 = 0$
 $KR_1 = -3.3333$

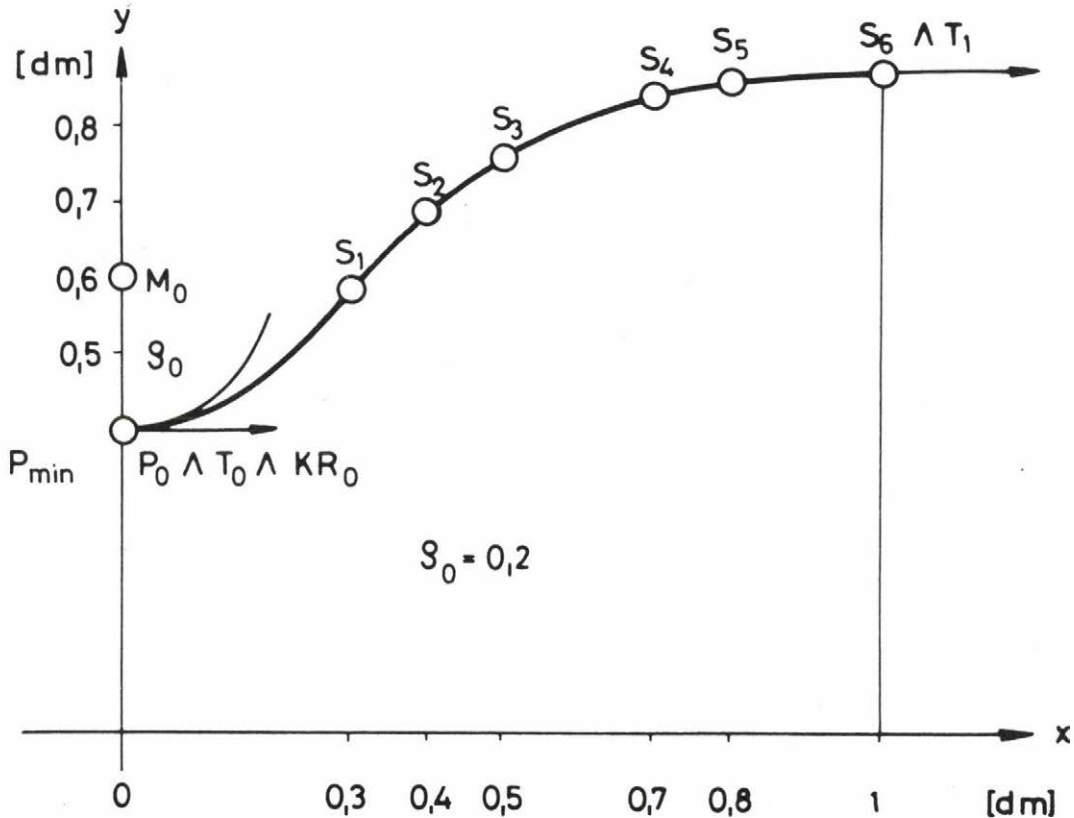
B i l d 1

Standardvorgaben an der Stelle $x_0 = 0$:

Anfangsordinate y_0 , Anfangsanstieg $T_0 = 0$, Anfangskrümmung KR_0

$$\begin{aligned} \emptyset R &= 5 & n &= 6 \\ u_{\text{red}} &= 6 - 3 = 3 & r &= 1 & u_{\text{red}} - r &= 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \emptyset R &= 5 \\ u_{\text{red}} &= 6 - 3 = 3 \end{aligned}} \right\} n > (u_{\text{red}} - r)$$

Stützpunkte und Zusatzvorgaben: $S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_6 \Delta T_1$



Daten:

$$\begin{aligned} \emptyset R &= 5 & y_0 &= 0.4 & T_0 &= 0 & KR_0 &= 5 & (P_{\text{min}}) \\ & & n &= 6 & n_p &= 0 & n_t &= 1 & n_{kr} &= 0 \end{aligned}$$

	x	y	KZ
S_1 :	0.3	0.58	1
S_2 :	0.4	0.69	1
S_3 :	0.5	0.76	1
S_4 :	0.7	0.84	1
S_5 :	0.8	0.86	1
S_6 :	1	0.87	4

$$T_1 = 0$$

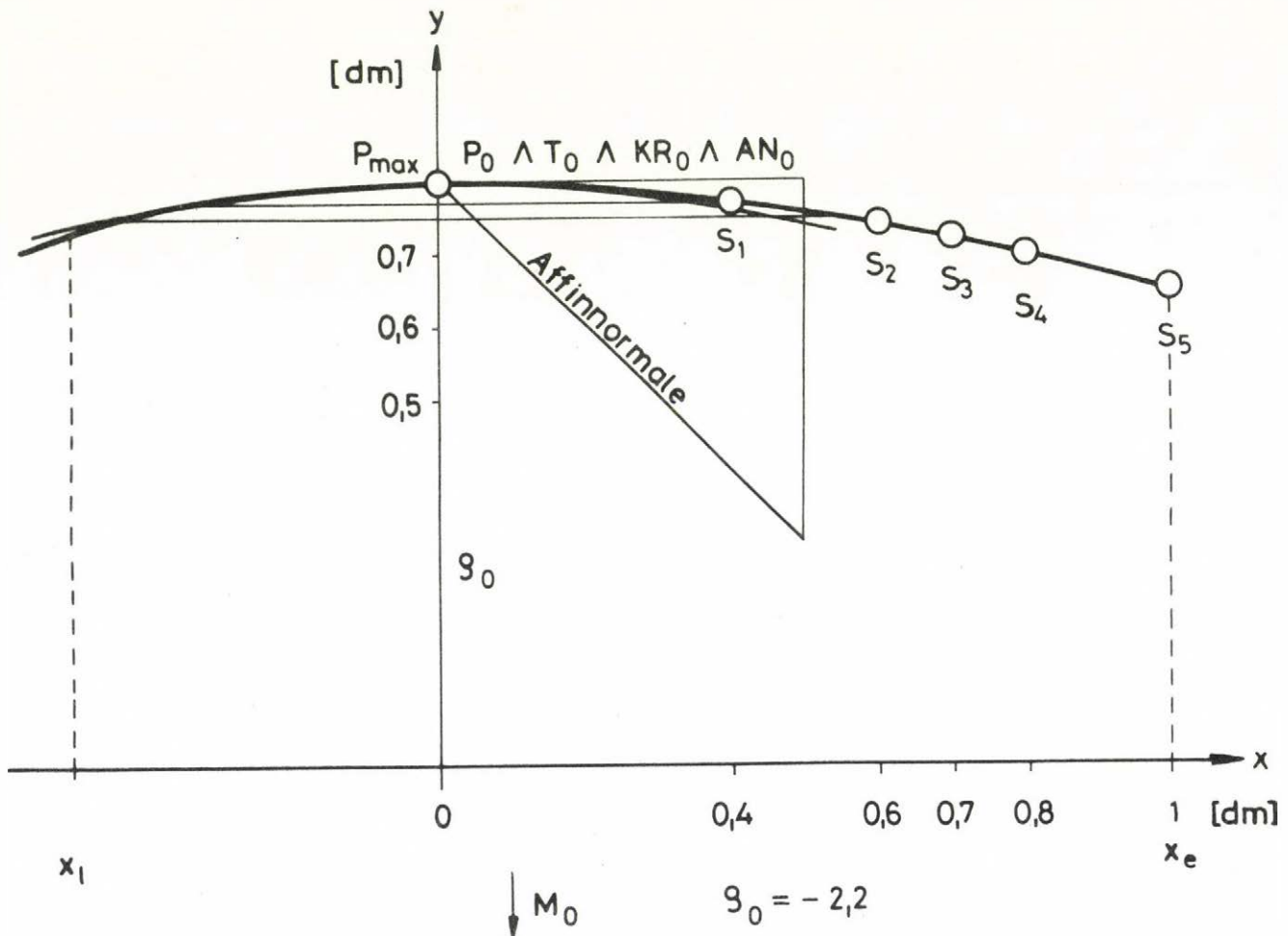
Standardvorgaben an der Stelle $x_0 = 0$:

Anstieg der Affinnormalen AN_0

Anfangsordinate y_0 , Anfangsanstieg $T_0 = 0$, Anfangskrümmung KR_0

$$\left. \begin{array}{l} \emptyset R = 5 \quad n = 5 \\ u_{red} = 6 - 4 = 2 \quad r = 0 \quad u_{red} - r = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow n > (u_{red} - r)$$

Stützpunkte: $S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_5$



Daten:

$$\emptyset R = 5 \quad y_0 = 0.8 \quad T_0 = 0 \quad KR_0 = -0.4545 \quad AN_0 = -1(P_{max})$$

$$n = 5 \quad np = 0 \quad nt = 0 \quad nkr = 0$$

	x	y	KZ
S_1 :	0.4	0.77	1
S_2 :	0.6	0.74	1
S_3 :	0.7	0.72	1
S_4 :	0.8	0.70	1
S_5 :	1	0.65	1

B i l d 3

Fall $n = (u_{\text{red}} - r)$

(gilt für Bild 4 bis 26)

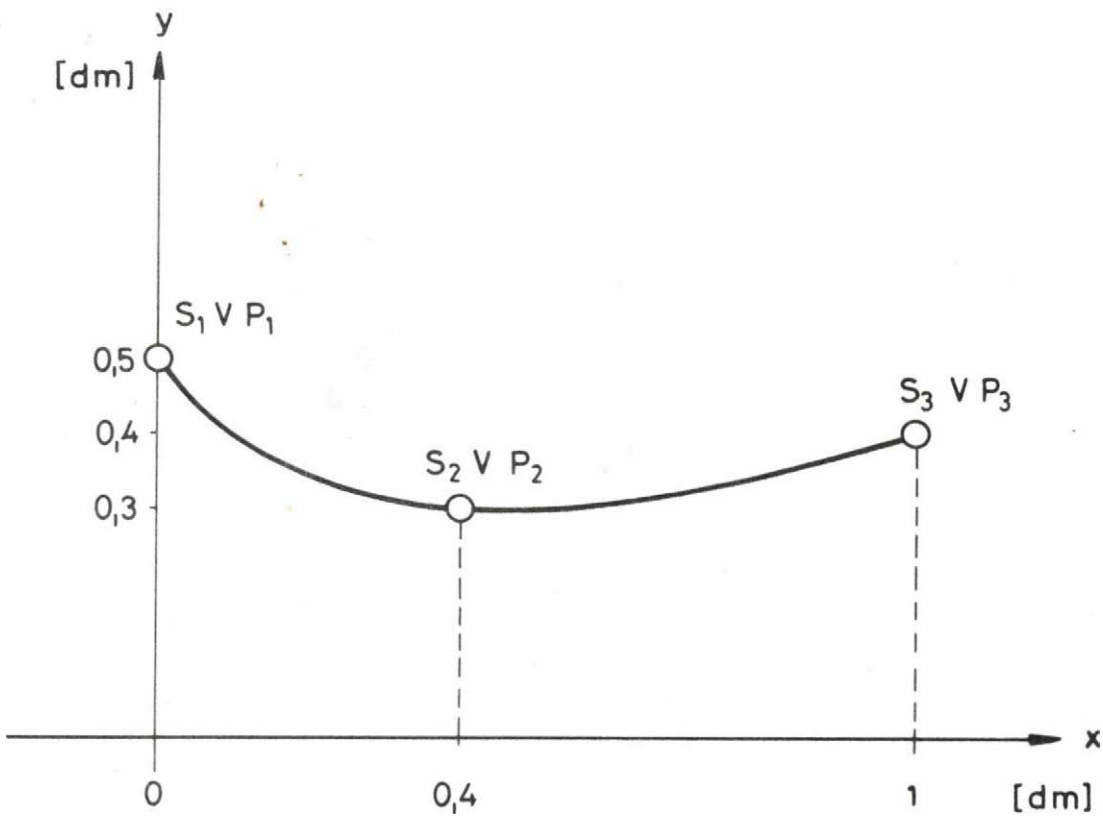
wobei $u_{\text{red}} = u$, wenn keine
Standardvorgaben

Standardvorgaben: keine (gilt für Bild 4 bis 15)

$\emptyset R = 2$

$u = 3$

Stützpunkte bzw. Vorgaben: $(S_1 \Delta S_2 \Delta S_3) \vee (P_1 \Delta P_2 \Delta P_3)$



Daten:

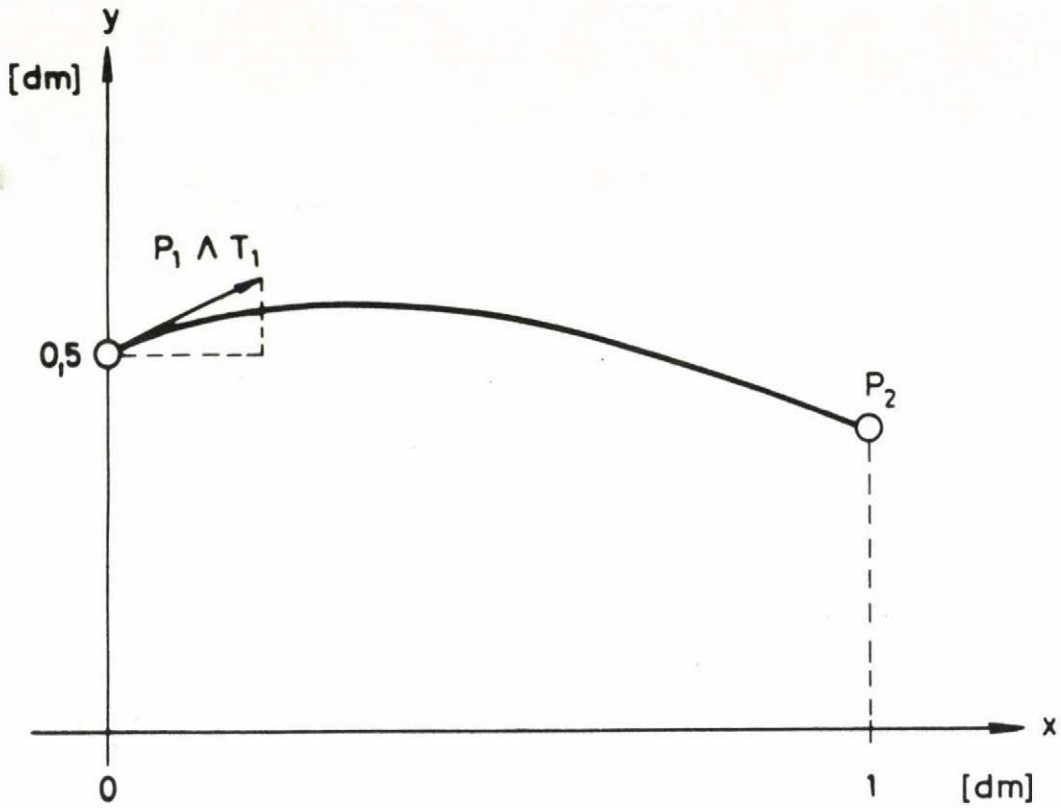
$\emptyset R = 2$	$n = 3V0$	$np = 0V3$	$nt = 0$	$nkr = 0$
$S_1 \vee P_1 :$	$x = 0$	$y = 0,5$	$KZ = 1 \vee 2$	
$S_2 \vee P_2 :$	$x = 0,4$	$y = 0,3$	$KZ = 1 \vee 2$	
$S_3 \vee P_3 :$	$x = 1$	$y = 0,4$	$KZ = 1 \vee 2$	

B i l d 4

$$\emptyset_R = 2$$

$$u = 3$$

Vorgaben: $P_1 \Delta T_1 \Delta P_2$



Daten:

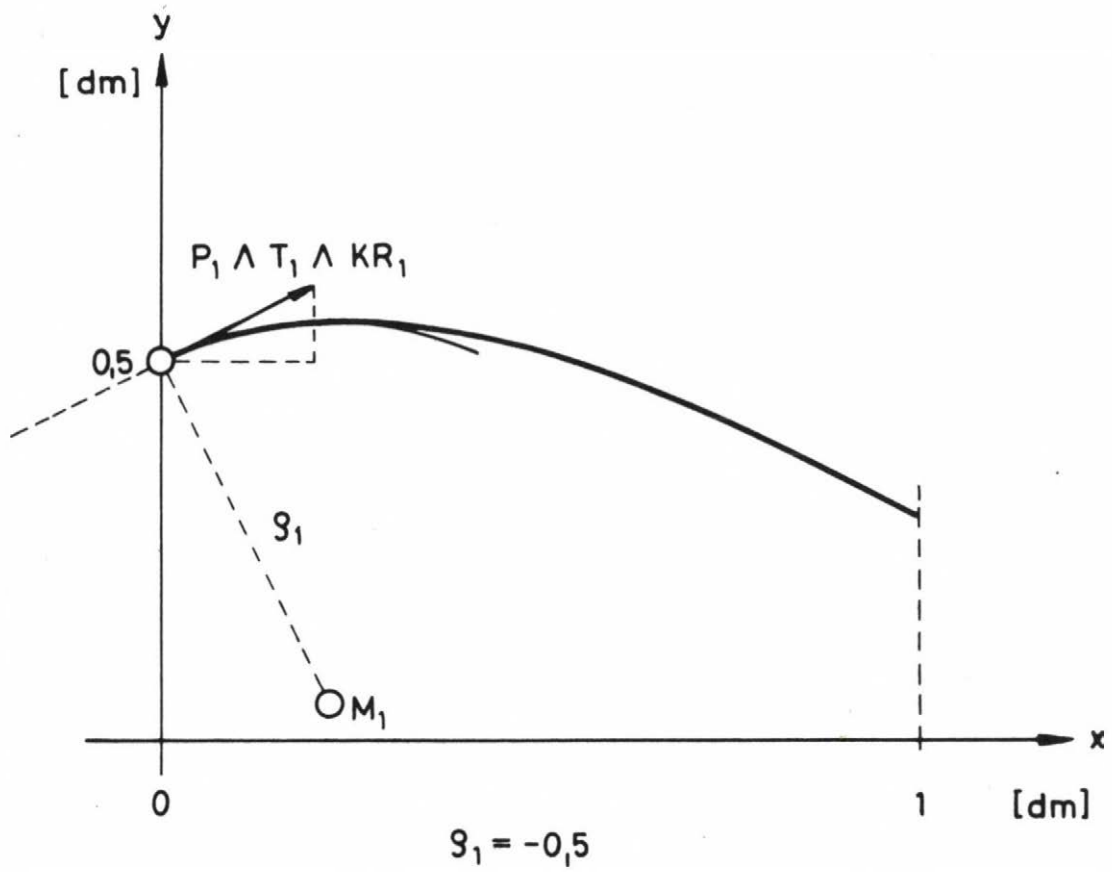
$\emptyset_R = 2$	$n = 0$	$n_p = 2$	$n_t = 1$	$n_{kr} = 0$
$P_1 :$	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 5$	
$P_2 :$	$x = 1$	$y = 0.4$	$KZ = 2$	
$T_1 =$	0.5			

B i l d 5

$$\emptyset R = 2$$

$$u = 3$$

Vorgaben: $P_1 \Delta T_1 \Delta KR_1$



Daten:

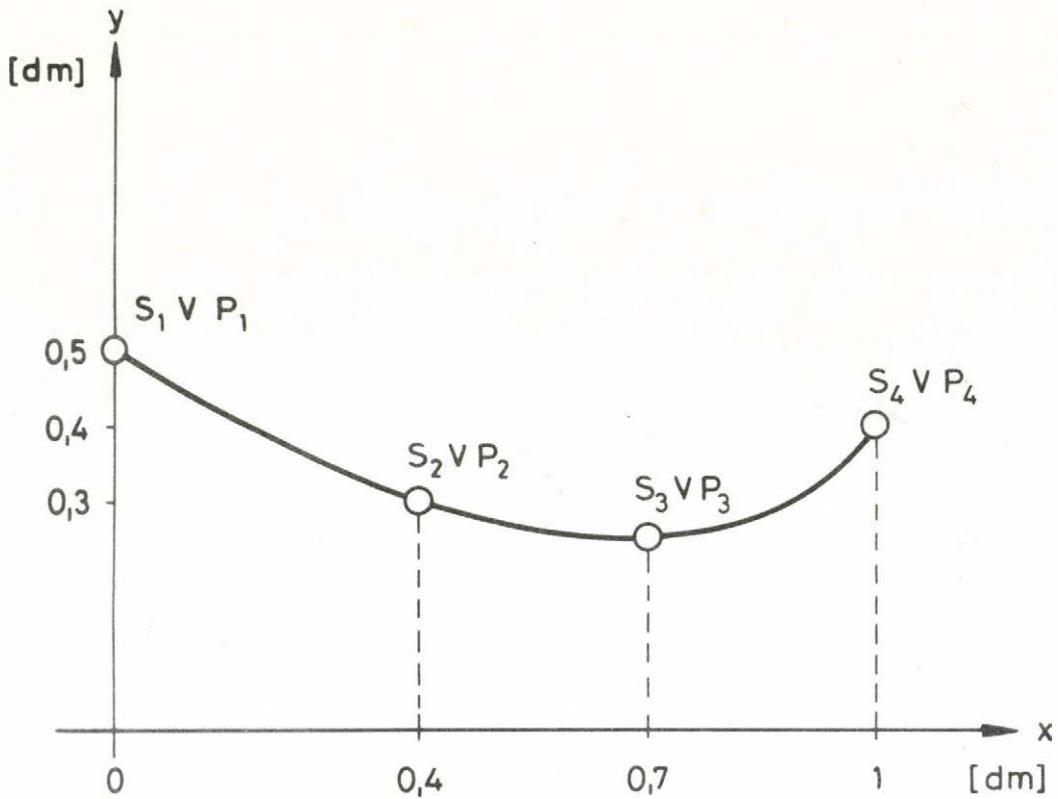
$\emptyset R = 2$	$n = 0$	$np = 1$	$nt = 1$	$nkr = 1$
$P_1 :$	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 8$	
$T_1 =$	0.5			
$KR_1 =$	-2			

B i l d 6

$$\emptyset R = 3$$

$$u = 4$$

Stützpunkte und Vorgaben: $(S_1 \Delta S_2 \Delta S_3 \Delta S_4) \vee$
 $(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3 \Delta P_4)$



Daten:

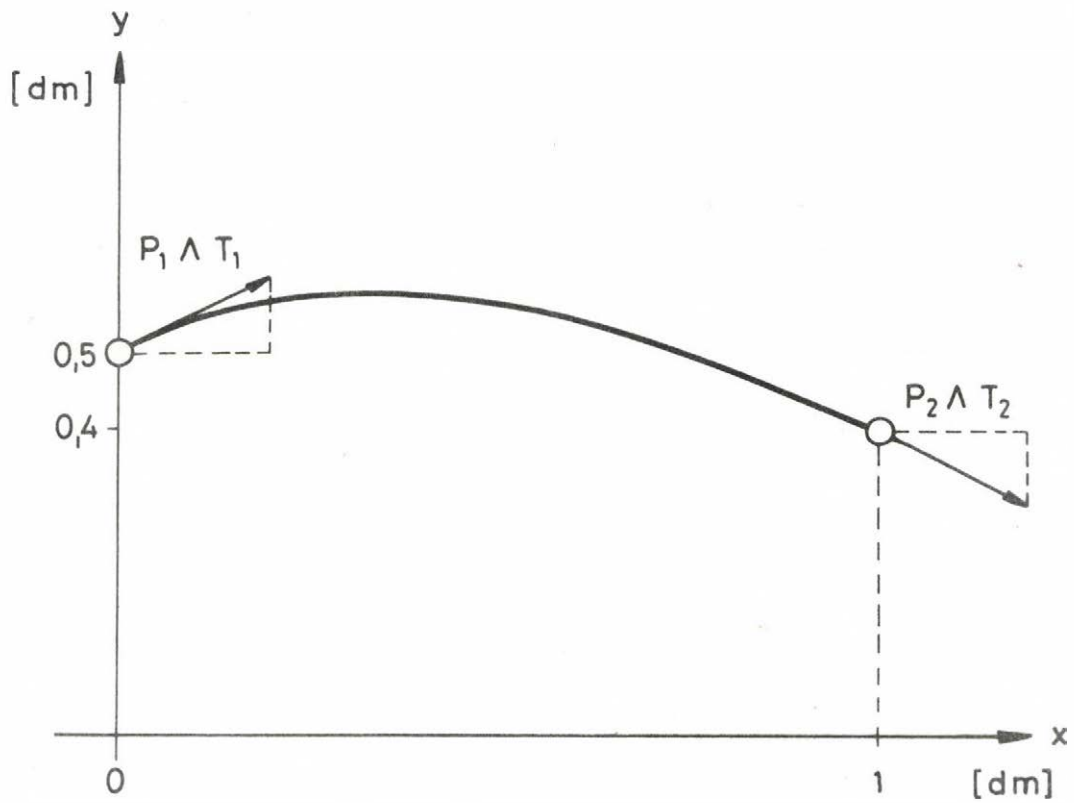
$\emptyset R = 3$	$n = 4VO$	$np = 0V4$	$nt = 0$	$nkr = 0$
$S_1 \vee P_1 :$	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 1 \vee 2$	
$S_2 \vee P_2 :$	$x = 0.4$	$y = 0.3$	$KZ = 1 \vee 2$	
$S_3 \vee P_3 :$	$x = 0.7$	$y = 0.25$	$KZ = 1 \vee 2$	
$S_4 \vee P_4 :$	$x = 1$	$y = 0.4$	$KZ = 1 \vee 2$	

B i l d 7

$$\phi_R = 3$$

$$u = 4$$

Vorgaben: $P_1 \Delta T_1 \Delta P_2 \Delta T_2$



Daten:

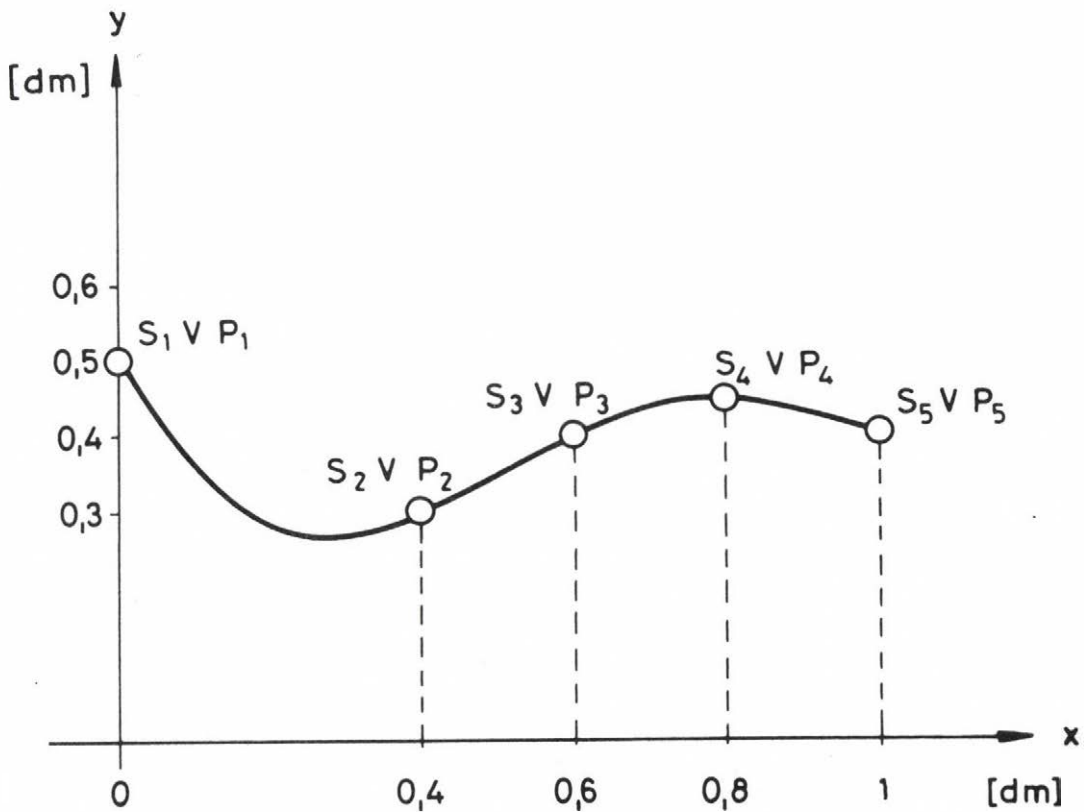
$\phi_R = 3$	$n = 0$	$n_p = 2$	$n_t = 2$	$n_{kr} = 0$
$P_1 :$	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 5$	
$P_2 :$	$x = 1$	$y = 0.4$	$KZ = 5$	
$T_1 =$	0.5			
$T_2 =$	-0.5			

B i l d 8

$$\phi_R = 4$$

$$u = 5$$

Stützpunkte bzw. Vorgaben: $(S_1 \Delta S_2 \Delta S_3 \Delta S_4 \Delta S_5) V$
 $(P_1 \Delta P_2 \Delta P_3 \Delta P_4 \Delta P_5)$



Daten:

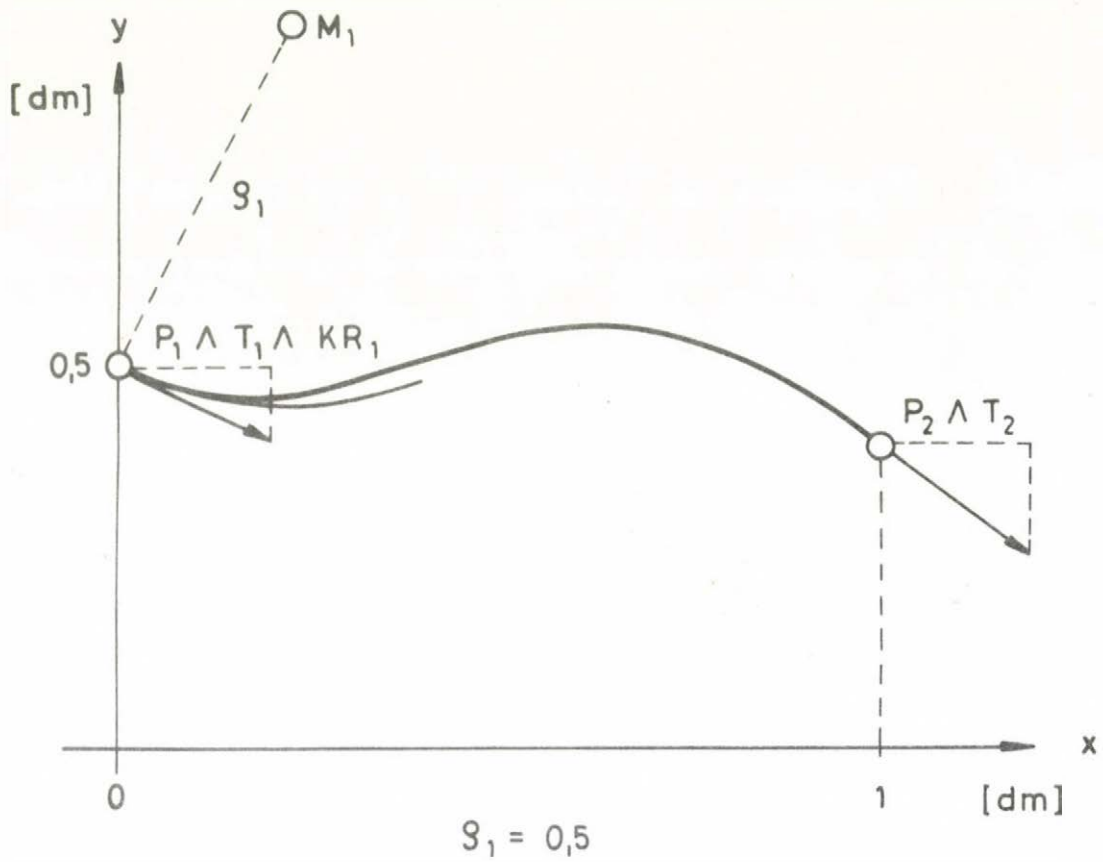
$\phi_R = 4$	$n = 5V0$	$np = 0V5$	$nt = 0$	$nkr = 0$
$S_1 V P_1$	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 1 V 2$	
$S_2 V P_2$	$x = 0.4$	$y = 0.3$	$KZ = 1 V 2$	
$S_3 V P_3$	$x = 0.6$	$y = 0.4$	$KZ = 1 V 2$	
$S_4 V P_4$	$x = 0.8$	$y = 0.45$	$KZ = 1 V 2$	
$S_5 V P_5$	$x = 1$	$y = 0.4$	$KZ = 1 V 2$	

B i l d 10

$$\varnothing_R = 4$$

$$u = 5$$

Vorgaben: $P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1 \wedge P_2 \wedge T_2$



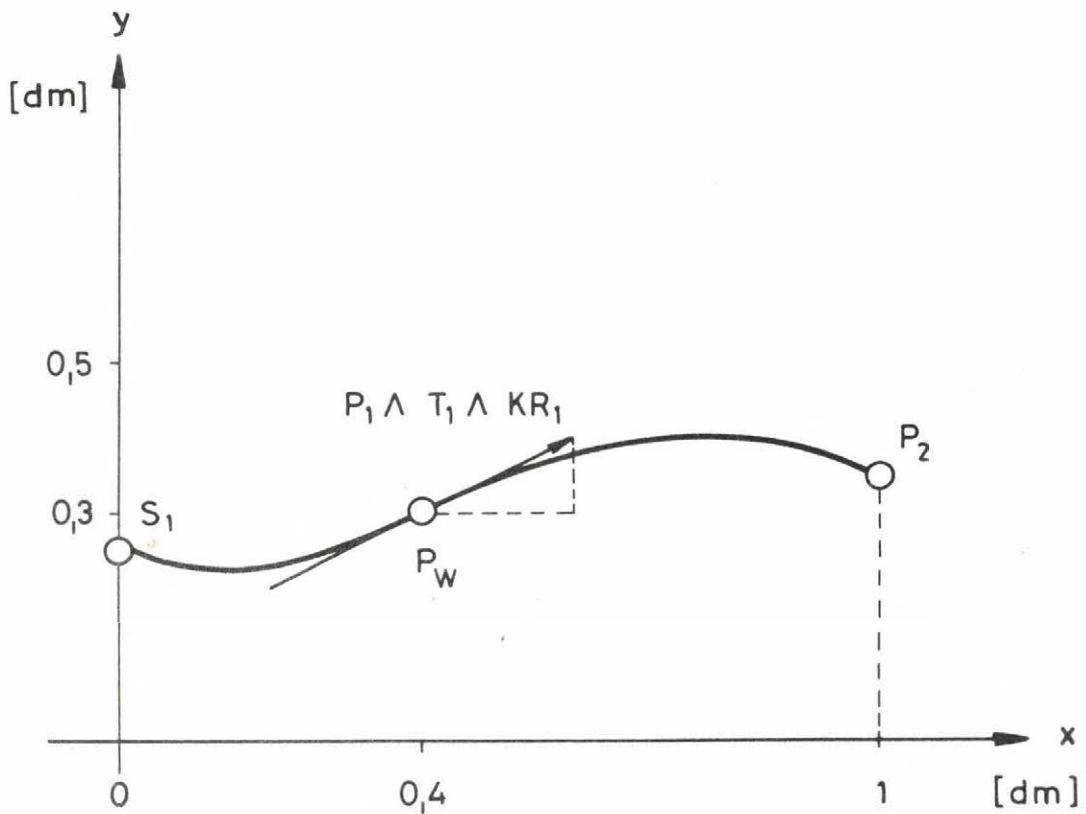
Daten:

$\varnothing_R = 4$	$n = 0$	$np = 2$	$nt = 2$	$nkr = 1$
$P_1 :$	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 8$	
$P_2 :$	$x = 1$	$y = 0.4$	$KZ = 5$	
$T_1 =$	$- 0.5$			
$KR_1 =$	2			
$T_2 =$	$- 0.75$			

$$\emptyset R = 4$$

$$u = 5$$

Stützpunkte bzw. Vorgaben: $S_1 \wedge P_1 \wedge T_1 \wedge KR_1 \wedge P_2$



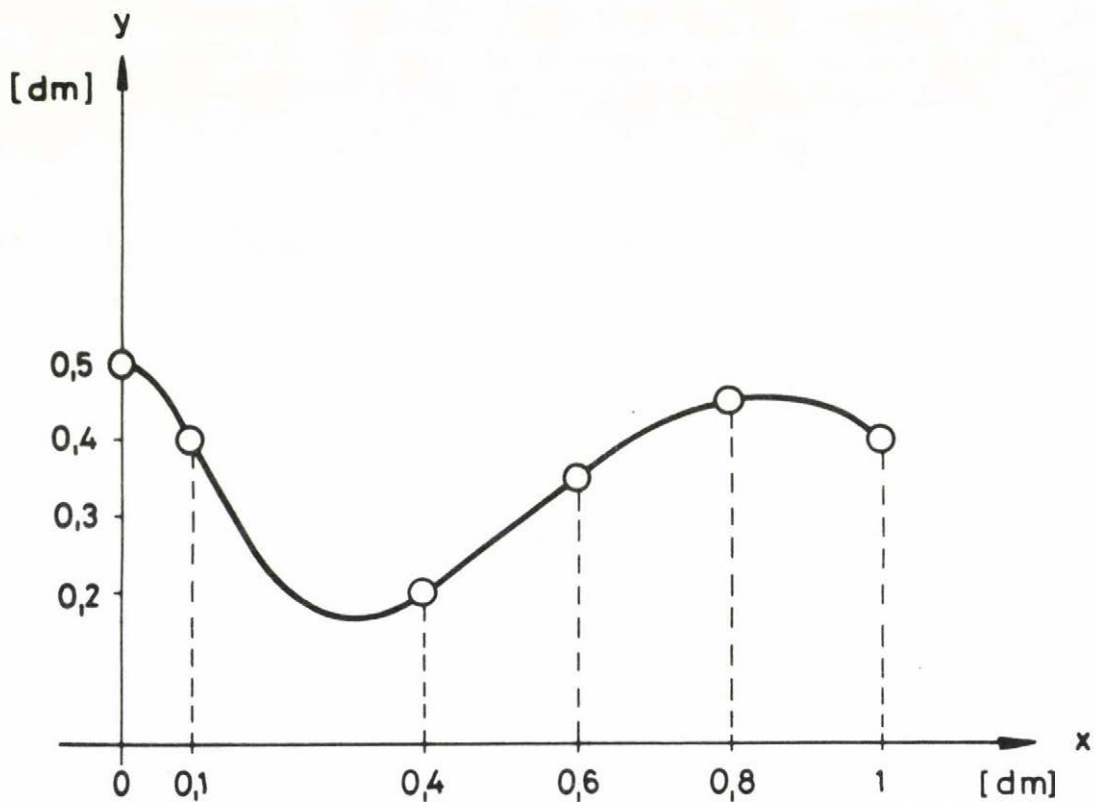
Daten:

$\emptyset R = 4$	$n = 1$	$np = 2$	$nt = 1$	$nkr = 1$
$S_1 :$	$x = 0$	$y = 0.25$	$KZ = 1$	
$P_1 :$	$x = 0.4$	$y = 0.3$	$KZ = 8$	(P_w)
$P_2 :$	$x = 1$	$y = 0.35$	$KZ = 2$	
$T_1 =$	0.5			
$KR_1 =$	0			

$$\emptyset_R = 5$$

$$u = 6$$

Stützpunkte bzw. Vorgaben: ($S_1 \Delta S_2 \Delta S_3 \Delta S_4 \Delta S_5 \Delta S_6$) V
 ($P_1 \Delta P_2 \Delta P_3 \Delta P_4 \Delta P_5 \Delta P_6$)



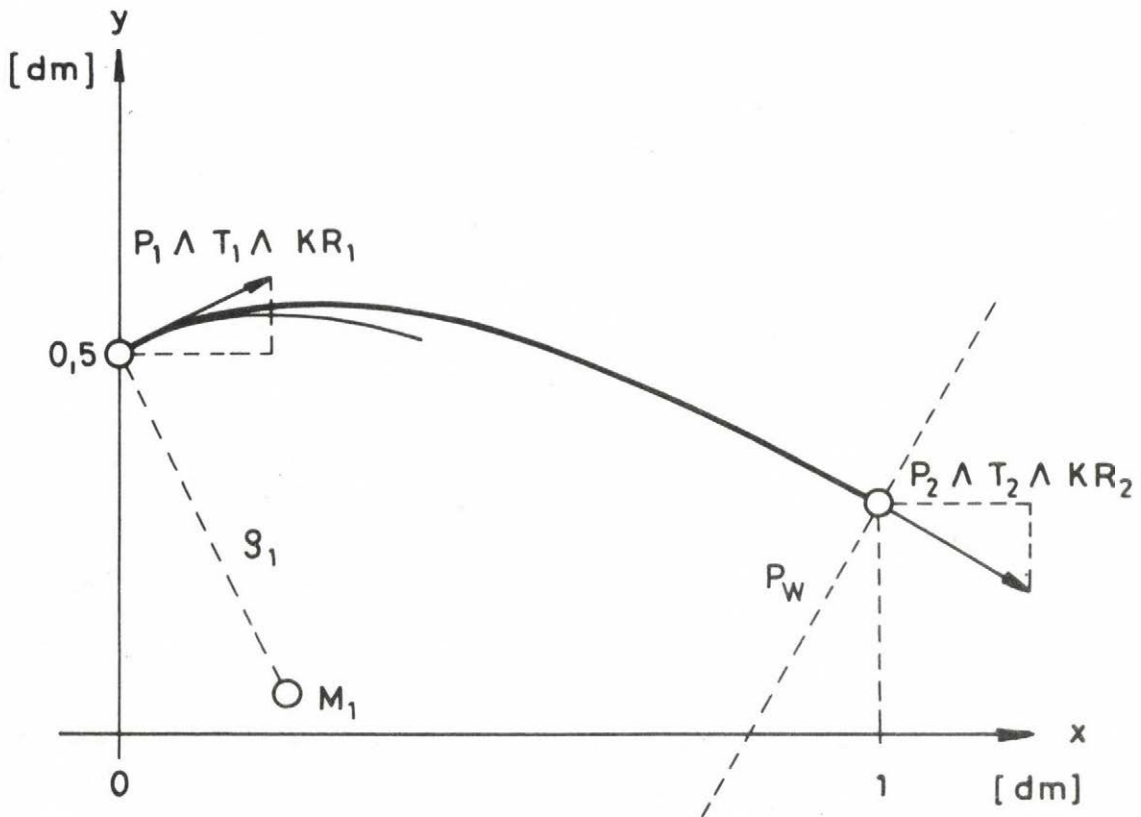
Daten:

$\emptyset_R = 5$	$n = 6V0$	$np = 0V6$	$nt = 0$	$nkr = 0$
$S_1 \quad V \quad P_1$	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 1V2$	
$S_2 \quad V \quad P_2$	$x = 0.1$	$y = 0.4$	$KZ = 1V2$	
$S_3 \quad V \quad P_3$	$x = 0.4$	$y = 0.2$	$KZ = 1V2$	
$S_4 \quad V \quad P_4$	$x = 0.6$	$y = 0.35$	$KZ = 1V2$	
$S_5 \quad V \quad P_5$	$x = 0.8$	$y = 0.45$	$KZ = 1V2$	
$S_6 \quad V \quad P_6$	$x = 1$	$y = 0.4$	$KZ = 1V2$	

$$\varnothing R = 5$$

$$u = 6$$

Vorgaben: $P_1 \Delta T_1 \Delta KR_1 \Delta P_2 \Delta T_2 \Delta KR_2$



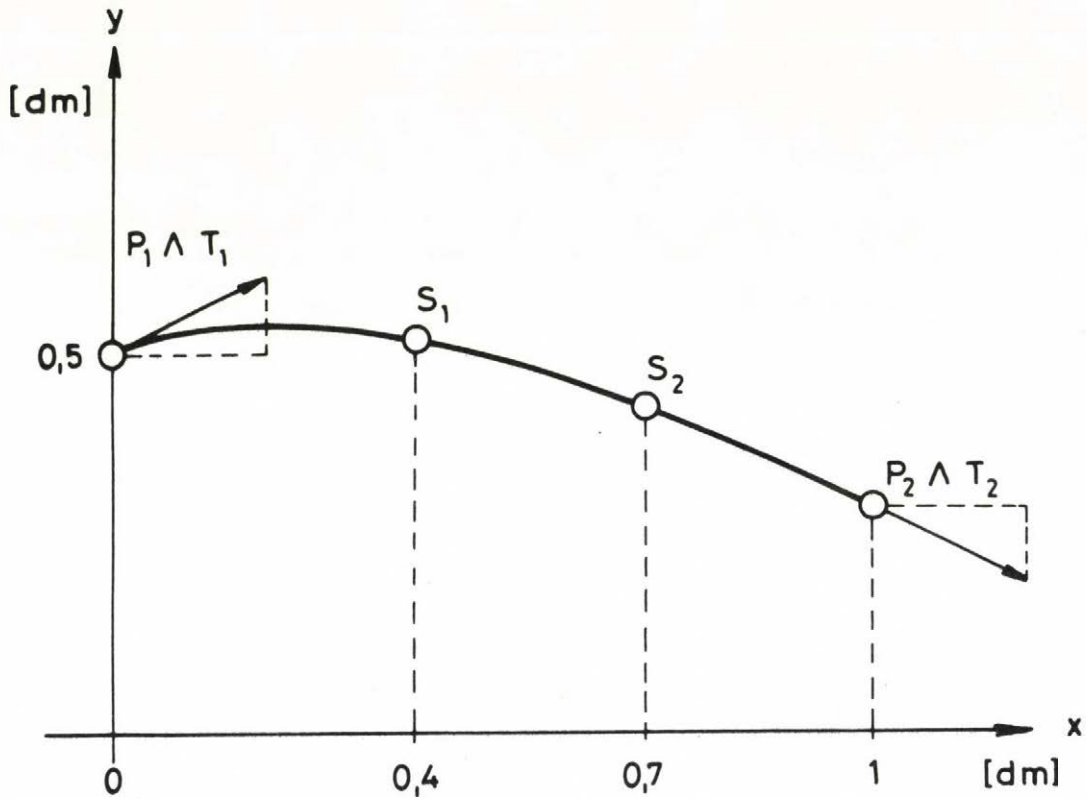
Daten:

$\varnothing R$	=	5	$n = 0$	$np = 2$	$nt = 2$	$nkr = 2$
P_1	:	$x = 0$	$y = 0.5$	$KZ = 8$		
P_2	:	$x = 1$	$y = 0.3$	$KZ = 8$		(P_w)
T_1	=		0.5			
KR_1	=		- 2			
T_2	=		- 0.5			
KR_2	=		0			

$$\emptyset R = 5$$

$$u = 6$$

Stützpunkte und Vorgaben: $S_1 \Delta S_2 \Delta P_1 \Delta T_1 \Delta P_2 \Delta T_2$



Daten:

$\emptyset R$	=	5	n	=	2	np	=	2	nt	=	2	nkr	=	0
P_1	:		x	=	0	y	=	0.5	KZ	=	5			
S_1	:		x	=	0.4	y	=	0.52	KZ	=	1			
S_2	:		x	=	0.7	y	=	0.43	KZ	=	1			
P_2	:		x	=	1	y	=	0.3	KZ	=	5			
T_1	=				0.5									
T_2	=				- 0.5									

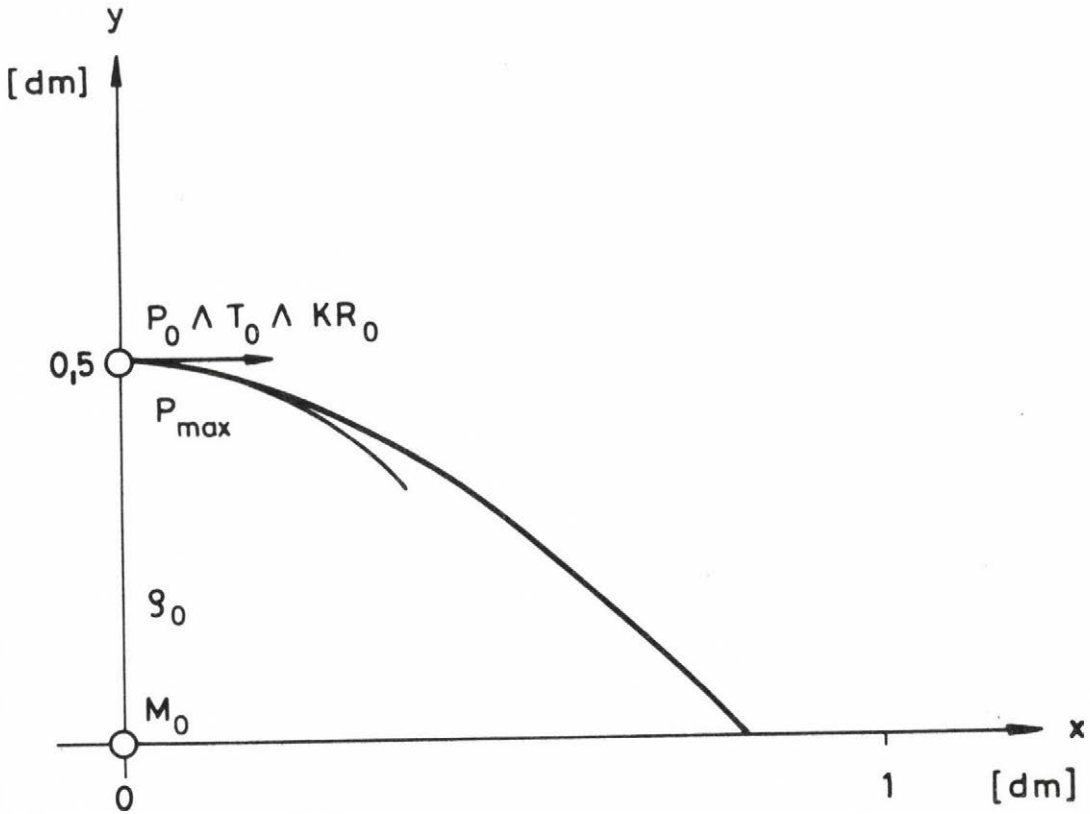
Standardvorgaben an der Stelle $x = 0$:

Anfangsordinate y_0 , Anfangsanstieg $T_0 = 0$, Anfangskrümmung KR_0 (*)

$$\emptyset R = 2$$

$$u_{\text{red}} = 3 - 3 = 0$$

Zusatzvorgaben: keine



Daten:

$$\emptyset R = 2$$

$$y_0 = 0.5 \quad (P_{\text{max}})$$

$$T_0 = 0$$

$$KR_0 = -2$$

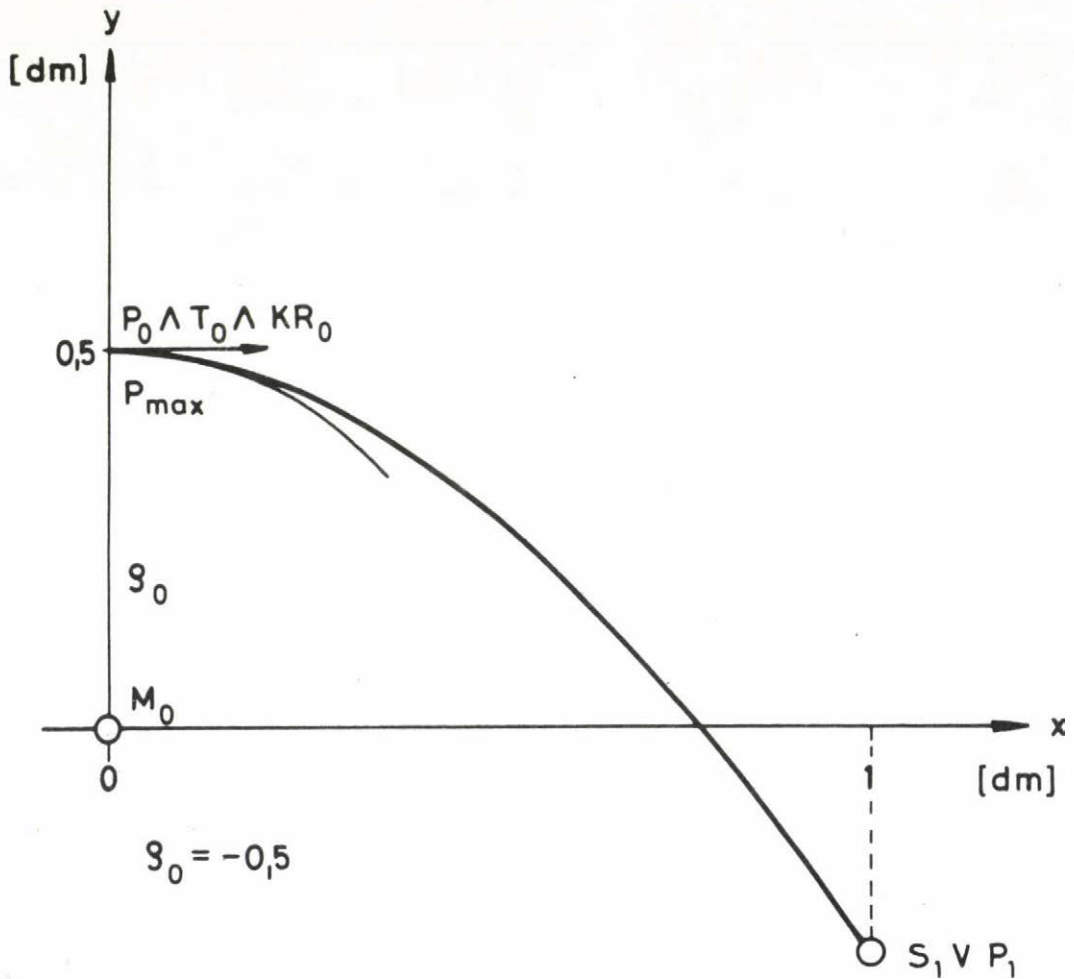
$$n = 0 \quad n_p = 0 \quad n_t = 0 \quad n_{kr} = 0 \quad (\text{betrifft Zusatzvorgaben})$$

Bemerkung: Obige Standardvorgaben (*) gelten auch für die folgenden Beispiele (Bild 17 bis Bild 22)

$$\emptyset R = 3$$

$$u_{\text{red}} = 4 - 3 = 1$$

Zusatzvorgaben: $S_1 \vee P_1$



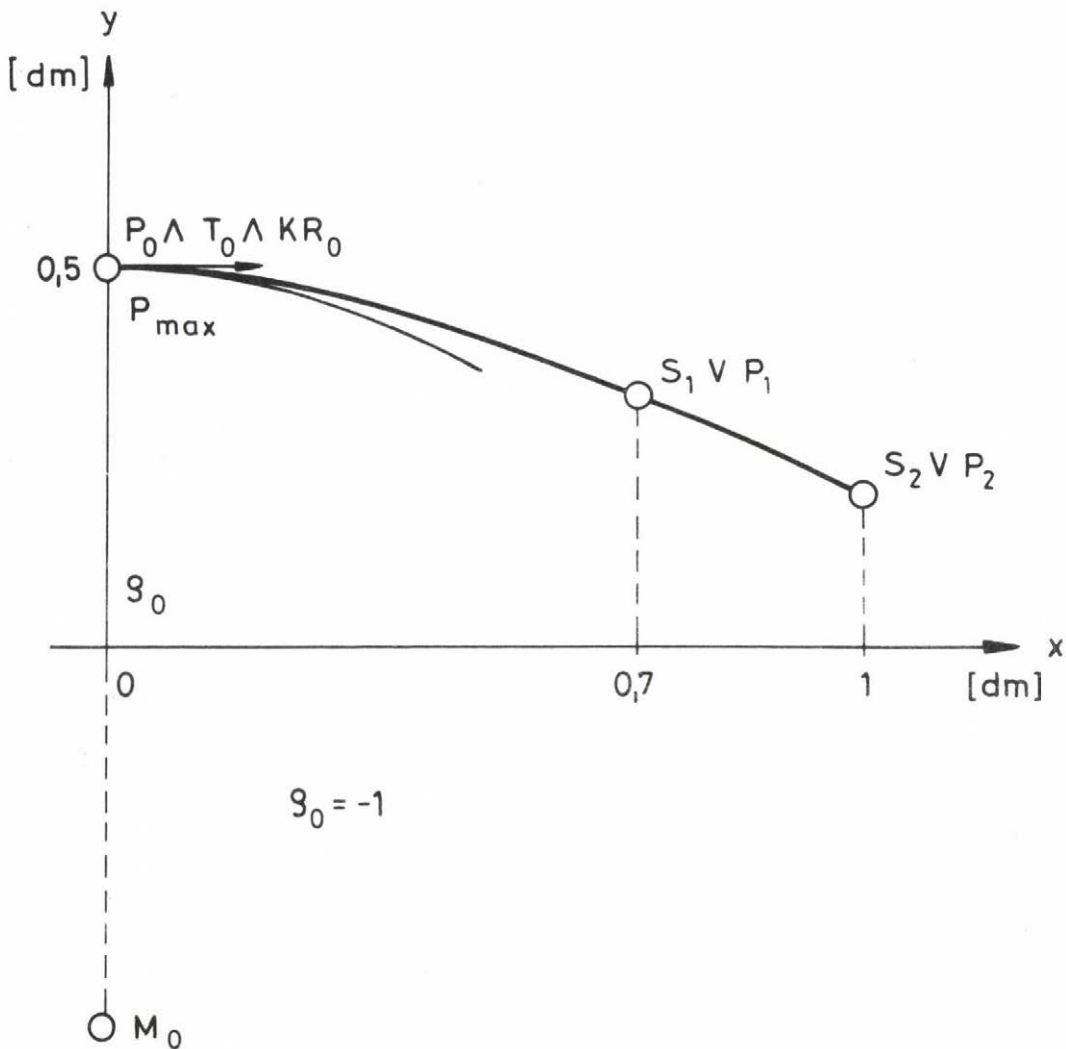
Daten:

$\emptyset R = 3$	$y_0 = 0.5$	$T_0 = 0$	$KR_0 = -2$	(P_{max})
$n = 1V0$	$np = 0V1$	$nt = 0$	$nkr = 0$	
$S_1 \vee P_1$	$x = 1$	$y = -0.3$	$KZ = 1V2$	

$$\varnothing R = 4$$

$$u_{\text{red}} = 5 - 3 = 2$$

Stützpunkte bzw. Zusatzvorgaben: $(S_1 \Delta S_2) \vee (P_1 \Delta P_2)$



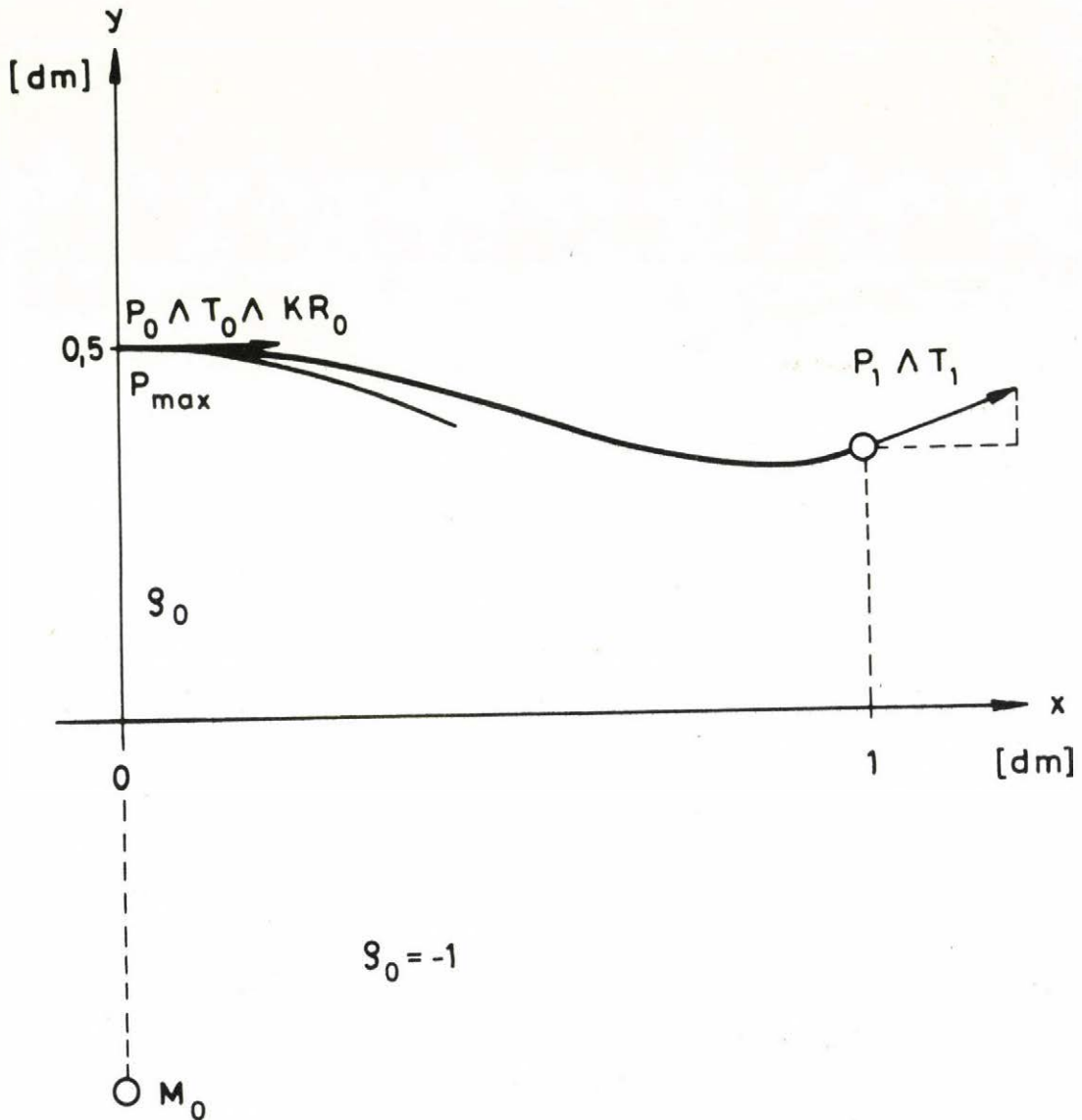
Daten:

$\varnothing R = 4$	$y_0 = 0.5$	$T_0 = 0$	$KR_0 = -1$ (P_{max})
$n = 2VO$	$n_p = 0V2$	$nt = 0$	$nkr = 0$
$S_1 \vee P_1 :$	$x = 0.7$	$y = 0.33$	$KZ = 1V2$
$S_2 \vee P_1 :$	$x = 1$	$y = 0.2$	$KZ = 1V''$

$$\varnothing R = 4$$

$$u_{\text{red}} = 5 - 3 = 2$$

Zusatzvorgaben: $P_1 \Delta T_1$



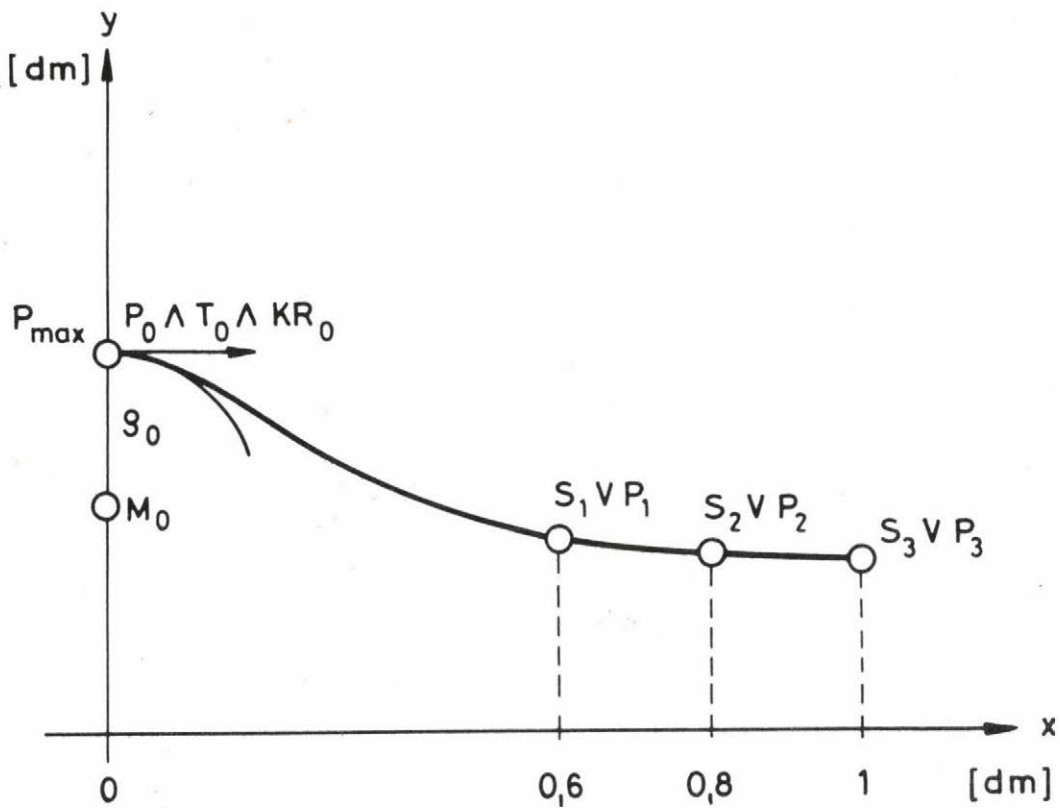
Daten:

$\varnothing R = 4$	$y_0 = 0.5$	$T_0 = 0$	$KR_0 = -1$	(P_{max})
$n = 0$	$n_p = 1$	$n_t = 1$	$n_{kr} = 0$	
$P_1 :$	$x = 1$	$y = 0.35$	$KZ = 5$	
$T_1 =$	0.4			

$$\varnothing_R = 5$$

$$u_{\text{red}} = 6 - 3 = 3$$

Stützpunkte und Zusatzvorgaben: $(S_1 \Delta S_2 \Delta S_3) \vee (P_1 \Delta P_2 \Delta P_3)$



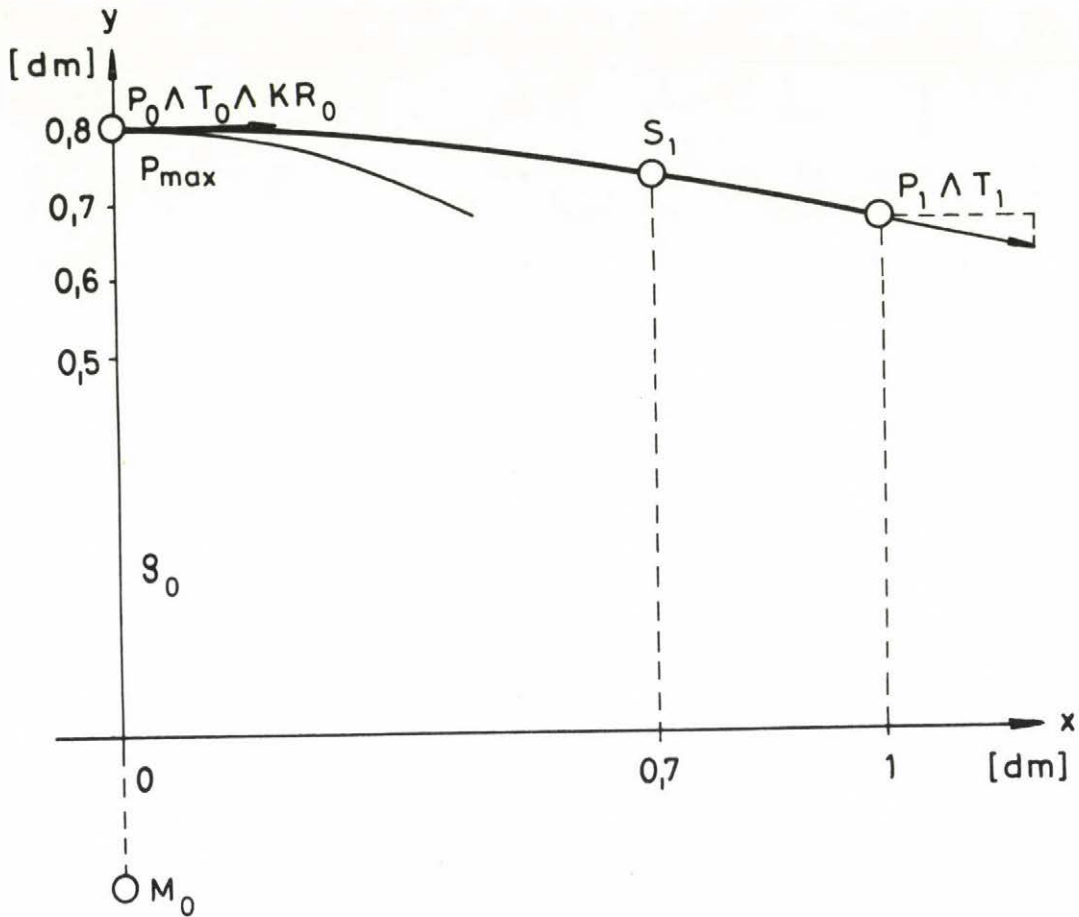
Daten:

$\varnothing_R = 5$	$y_0 = 0.5$	$T_0 = 0$	$KR_0 = -5$ (P_{max})
$n = 3V0$	$np = 0V3$	$nt = 0$	$nkr = 0$
$S_1 \vee P_1 :$	$x = 0.6$	$y = 0.25$	$KZ = 1V2$
$S_2 \vee P_2 :$	$x = 0.8$	$y = 0.23$	$KZ = 1V2$
$S_3 \vee P_3 :$	$x = 1$	$y = 0.22$	$KZ = 1V2$

$$\emptyset R = 5$$

$$u_{\text{red}} = 6 - 3 = 3$$

Stützpunkte und Zusatzvorgaben: $S_1 \Delta P_1 \Delta T_1$



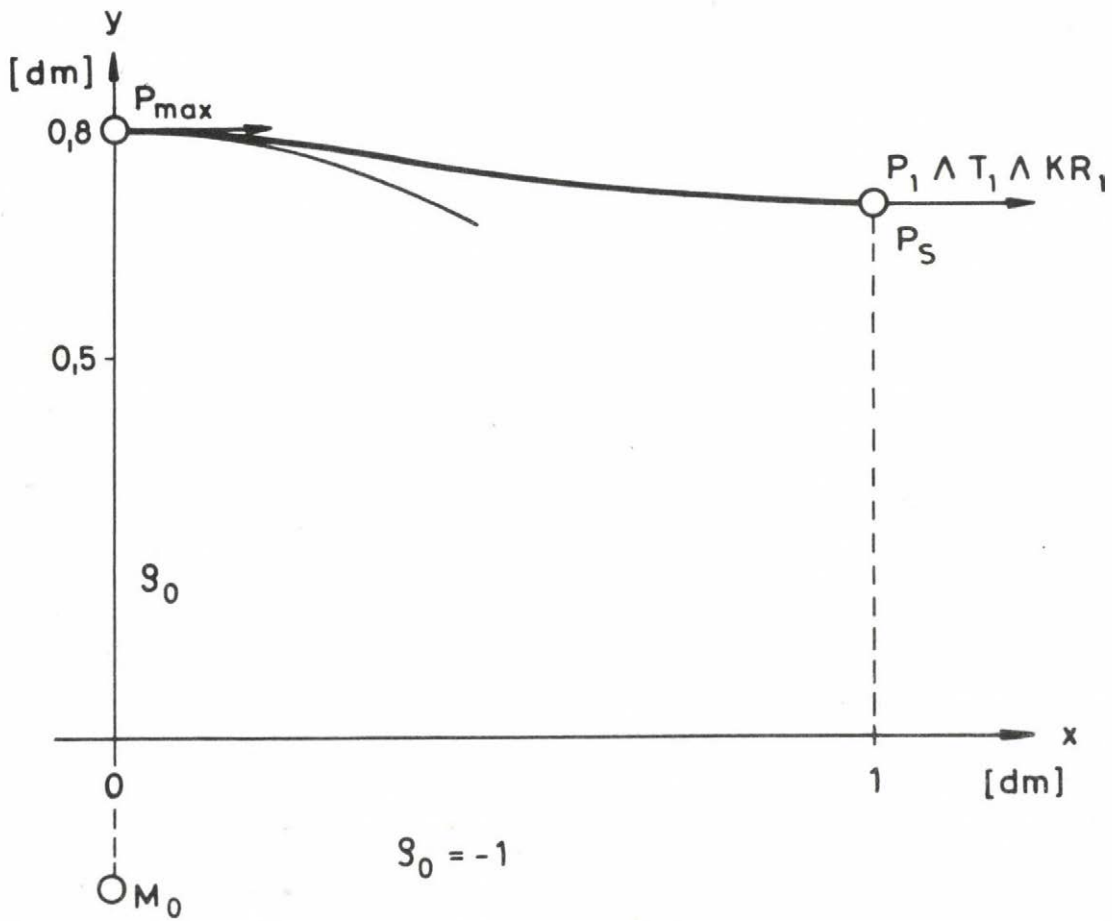
Daten:

$\emptyset R$	=	5	y_0	=	0.8	T_0	=	0	KR_0	=	-1	(P_{max})
n	=	1	n_p	=	1	n_t	=	1	n_{kr}	=	0	
S_1	:		x	=	0.7	y	=	0.73	KZ	=	1	
P_1	:		x	=	1	y	=	0.67	KZ	=	5	
T_1	=							-0.2				

$$\varnothing R = 5$$

$$u_{\text{red}} = 6 - 3 = 3$$

Zusatzvorgaben: $P_1 \Delta T_1 \Delta KR_1$ (Stufenpunkt)



Daten:

$$\varnothing R = 5 \quad y_0 = 0.8 \quad T_0 = 0 \quad KR_0 = -1 \quad (P_{\text{max}})$$

$$n = 0 \quad n_p = 1 \quad n_t = 1 \quad n_{kr} = 1$$

$$P_1 : \quad x = 1 \quad y = 0.7 \quad KZ = 8 \quad (P_S)$$

$$T_1 = 0$$

$$KR_1 = 0$$

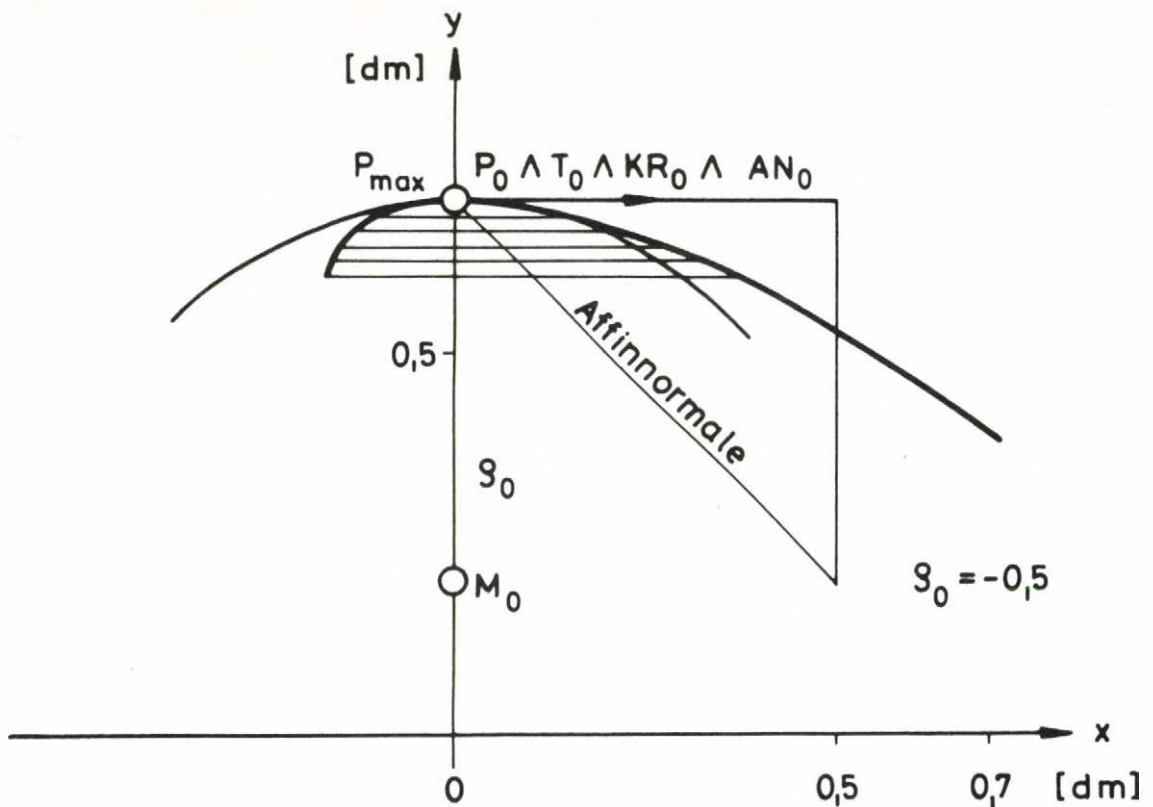
Standardvorgaben an der Stelle $x = 0$: Anfangsordinate y_0

Anfangsanstieg $T_0 = 0$, Anfangskrümmung KR_0 , Affinnormalen-
anstieg AN_0 (*)

$$\emptyset R = 3$$

$$u_{\text{red}} = 4 - 4 = 0$$

Zusatzvorgaben: keine



Daten:

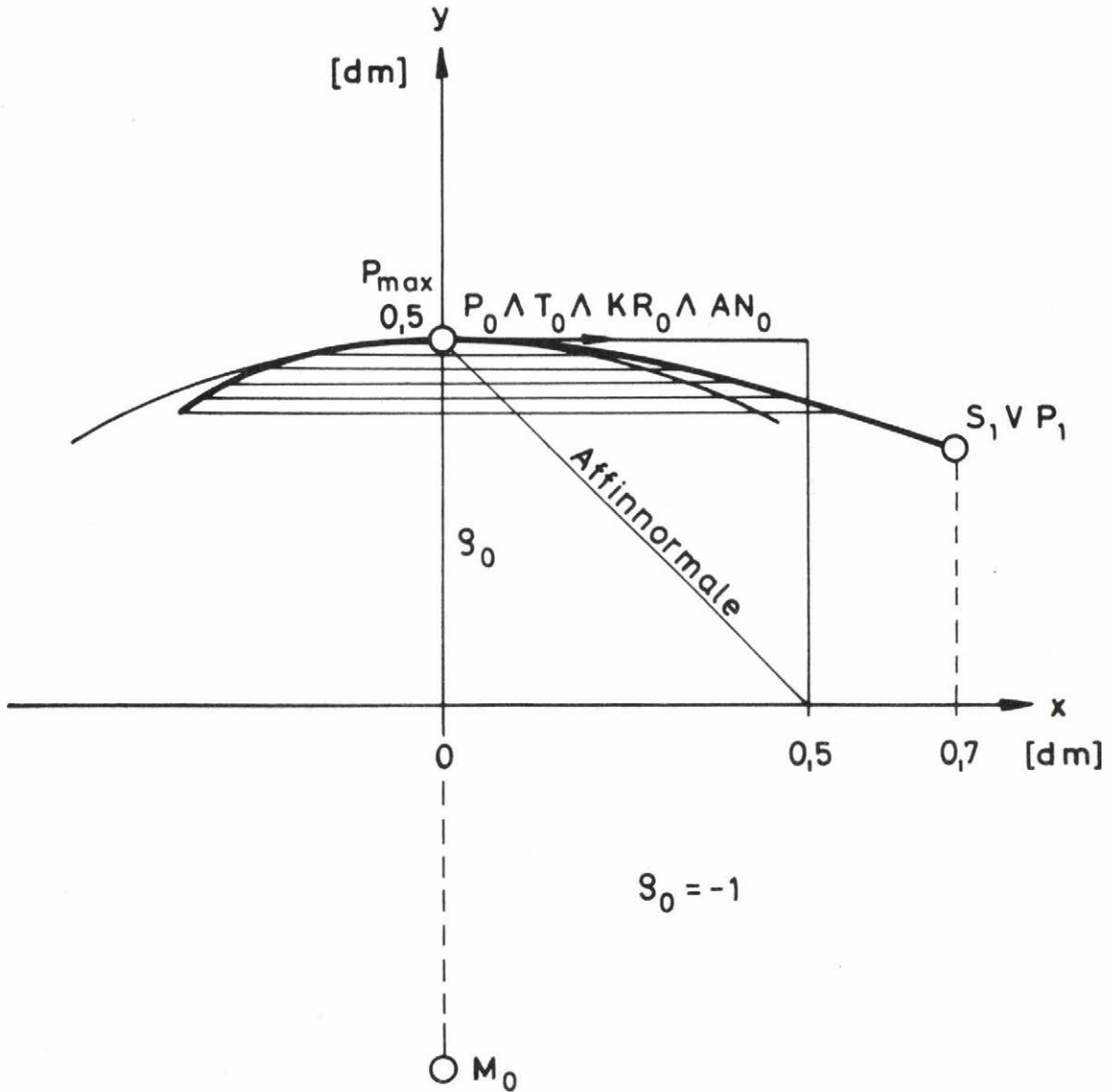
$\emptyset R = 3$	$y_0 = 0.7$	$T_0 = 0$	$KR_0 = -2$	$AN_0 = -1$
$n = 0$	$np = 0$	$nt = 0$	$nkr = 0$	

Bemerkung: Obige Standardvorgaben (*) gelten auch für die folgenden Beispiele (Bild 24 bis Bild 26)

$$\varnothing_R = 4$$

$$u_{\text{red}} = 5 - 4 = 1$$

Stützpunkte bzw. Zusatzvorgaben: $S_1 \vee P_1$



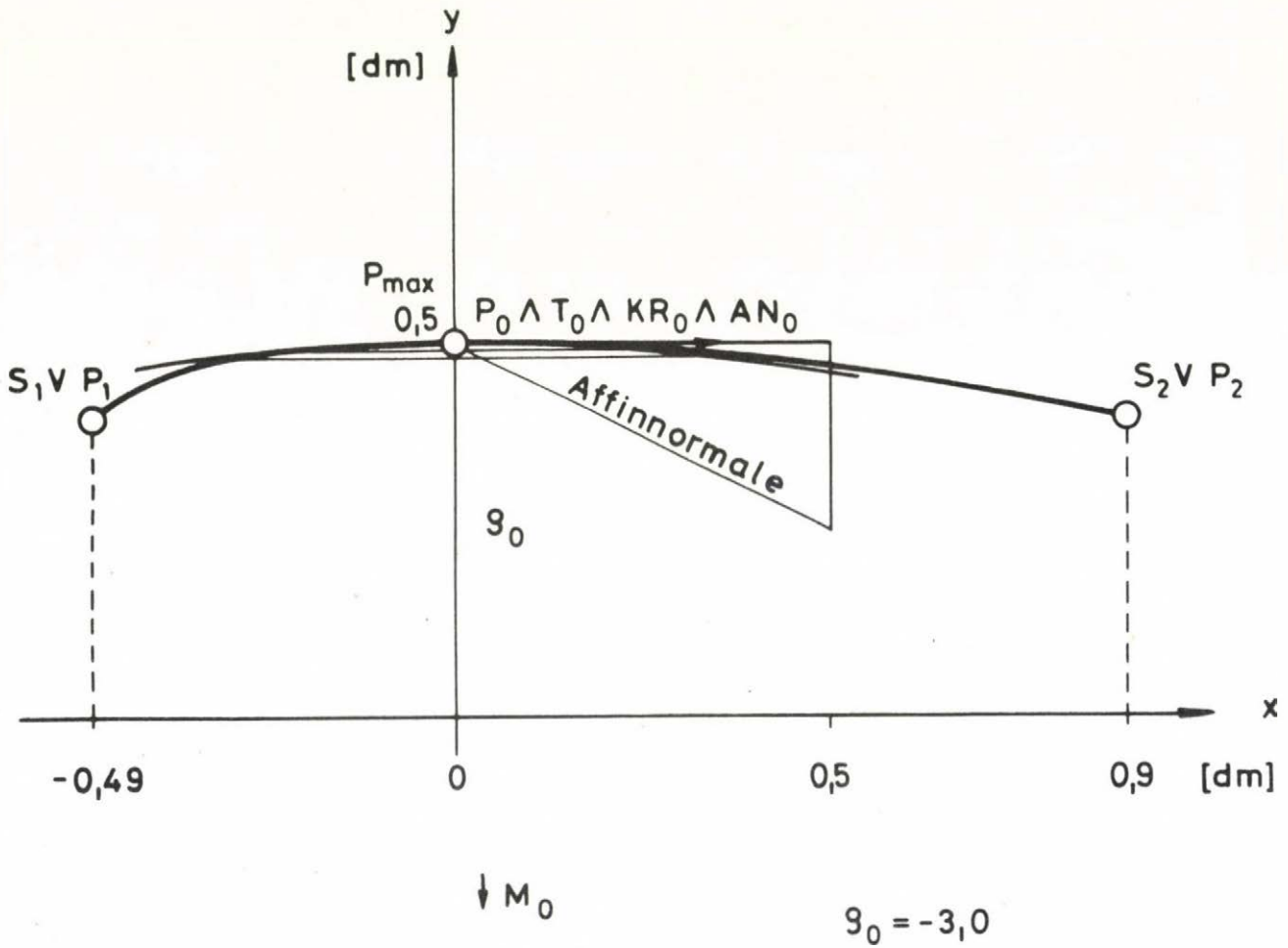
Daten:

$$\begin{array}{llllll} \varnothing_R = 4 & y_0 = 0.5 & T_0 = 0 & KR_0 = -1 & AN_0 = -1 (P_{\text{max}}) \\ n = 1V0 & np = 0V1 & nt = 0 & rkr = 0 & \\ S_1 \vee P_1 : & x = 0.7 & y = 0.35 & KZ = 1V2 & \end{array}$$

$$\emptyset R = 5$$

$$u_{\text{red}} = 6 - 4 = 2$$

Stützpunkte bzw. Zusatzvorgaben: $(S_1 \Delta S_2) \vee (P_1 \Delta P_2)$



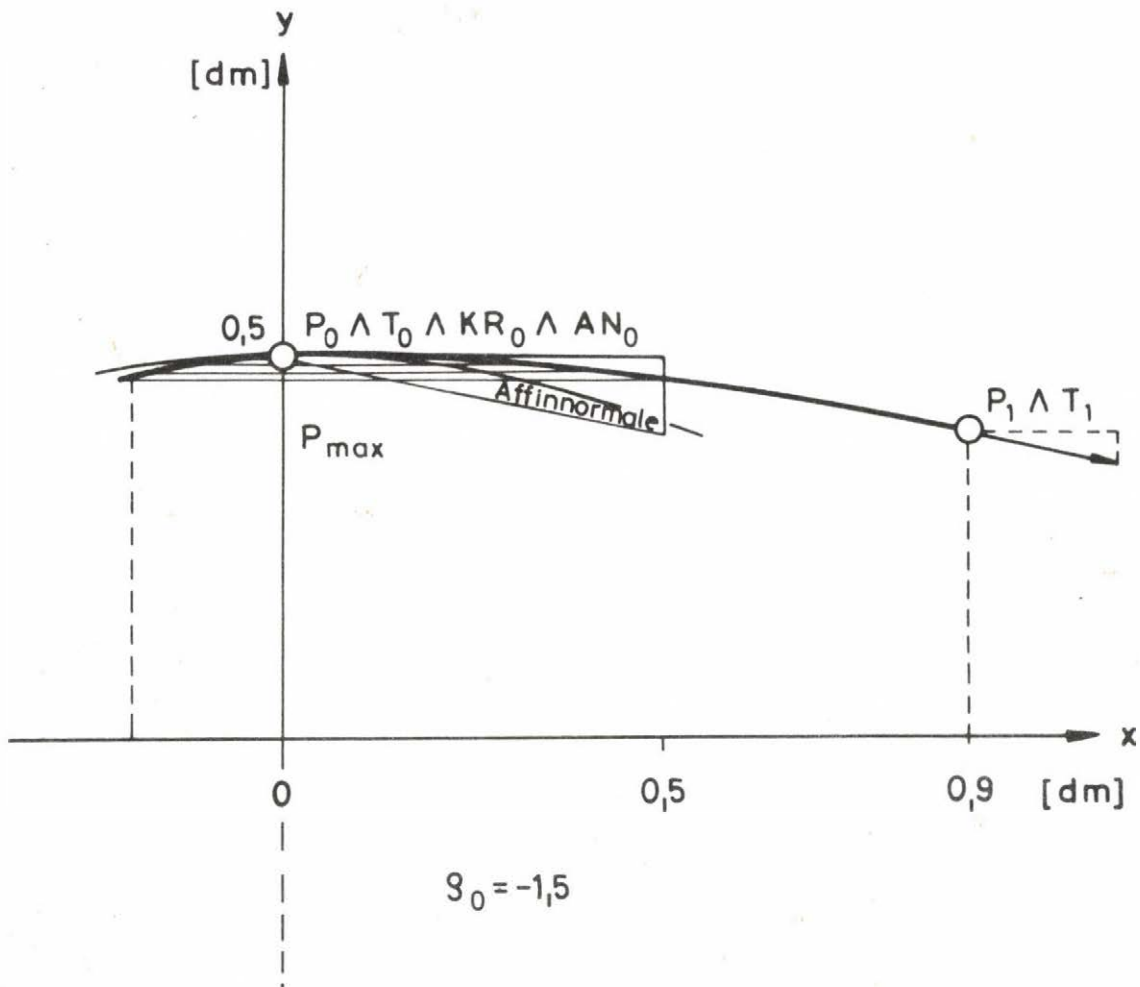
Daten:

$\emptyset R = 5$	$y_0 = 0.5$	$T_0 = 0$	$KR_0 = -0.3333$	$AN_0 = -0.5$
$n = 2V0$	$np = 0V2$	$nt = 0$	$nkr = 0$	
$S_1 \vee P_1 :$	$x = -0.49$	$y = 0.4$	$KZ = 1V2$	
$S_2 \vee P_2 :$	$x = 0.9$	$y = 0.4$	$KZ = 1V2$	

$$\varnothing R = 5$$

$$u_{\text{red}} = 6 - 4 = 2$$

Zusatzvorgaben: $P_1 \Delta T_1$



Daten:

$\varnothing R = 5$	$y_0 = 0.5$	$T_0 = 0$	$KR_0 = -0.6667$	$AN_0 = -0.2$
$n = 0$	$n_p = 1$	$n_t = 1$	$n_{kr} = 0$	
$P_1 :$	$x = 0.9$	$y = 0.4$	$KZ = 5$	
$T_1 = -0.2$				



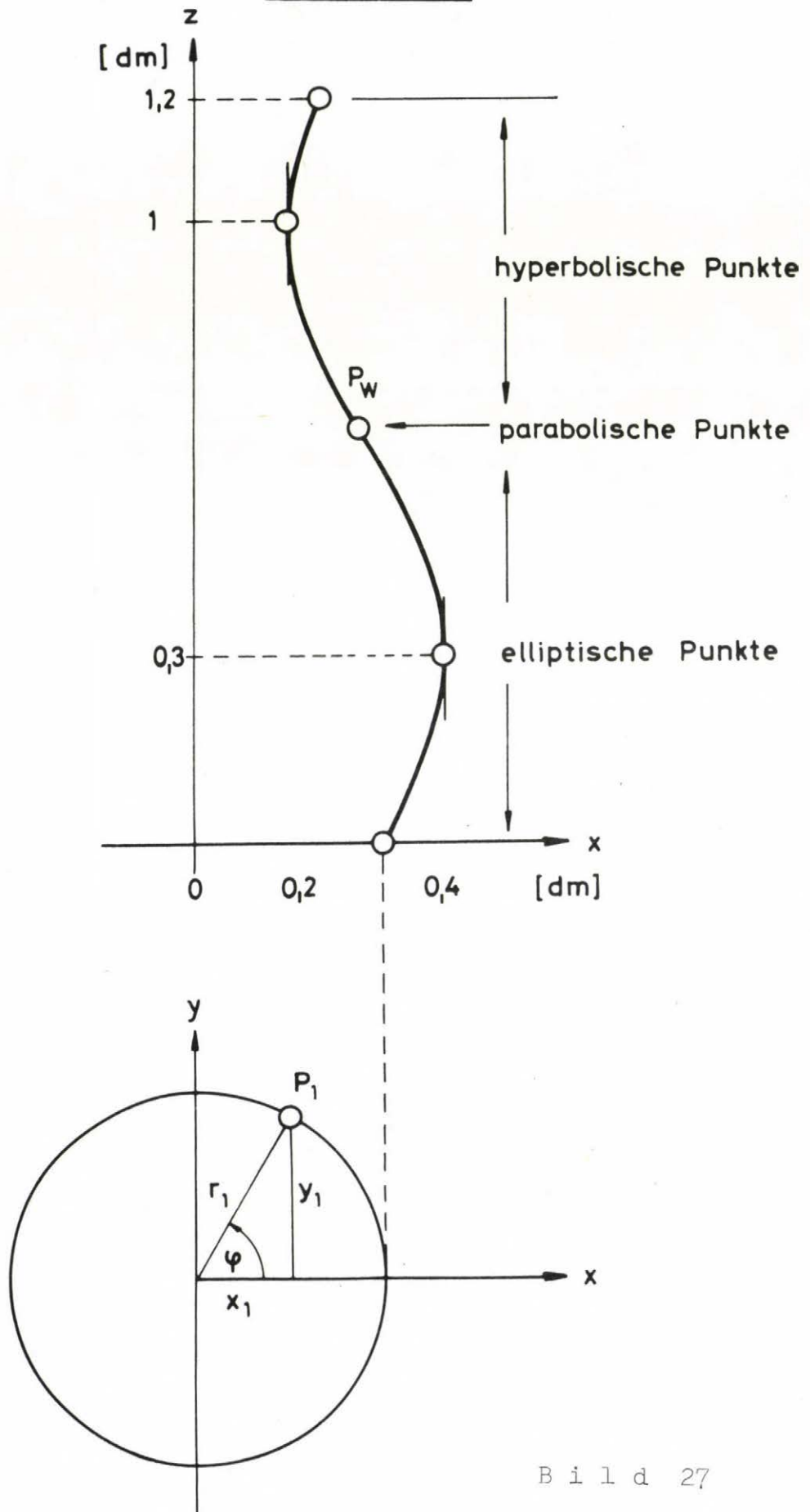
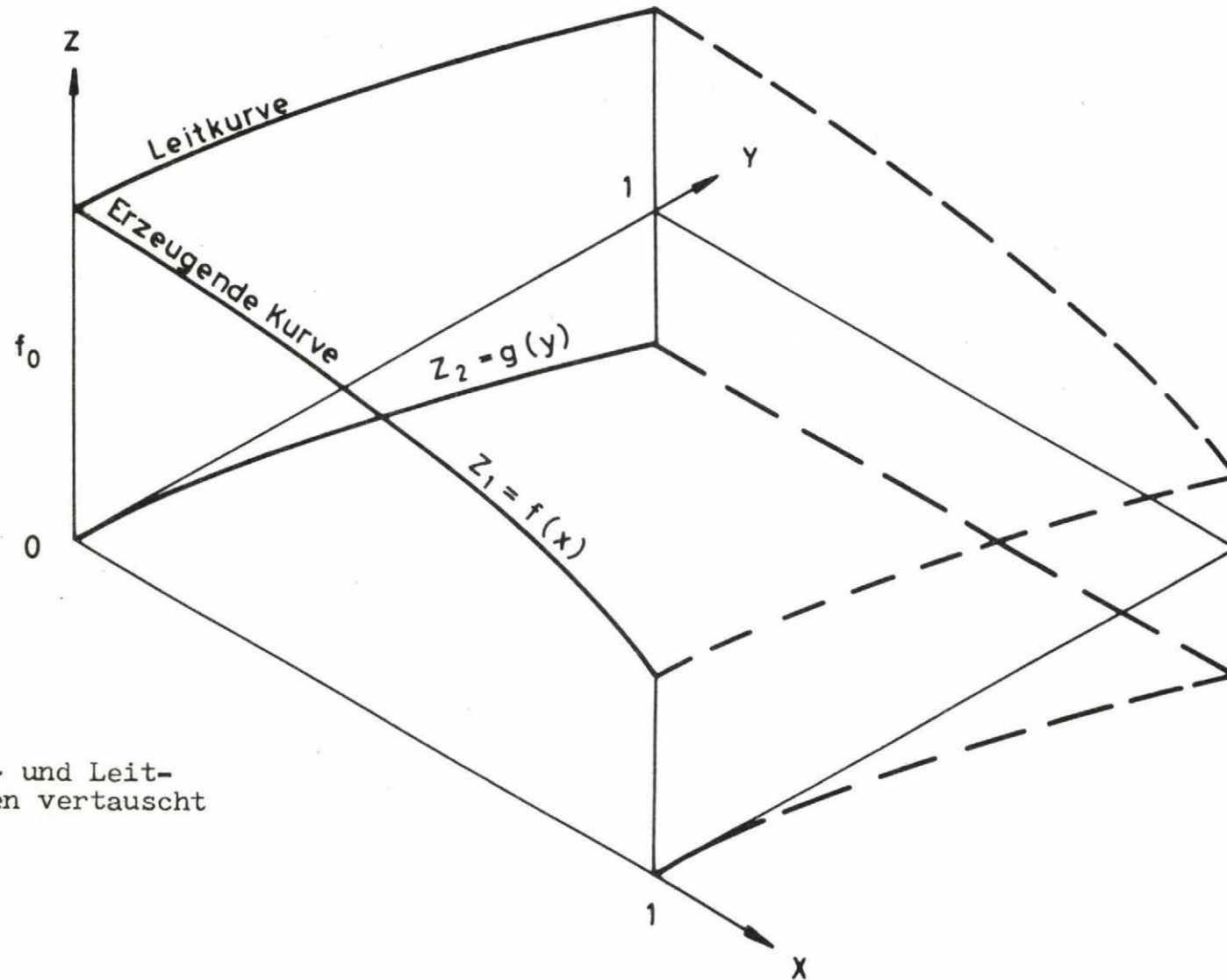
Drehfläche \mathcal{D} 

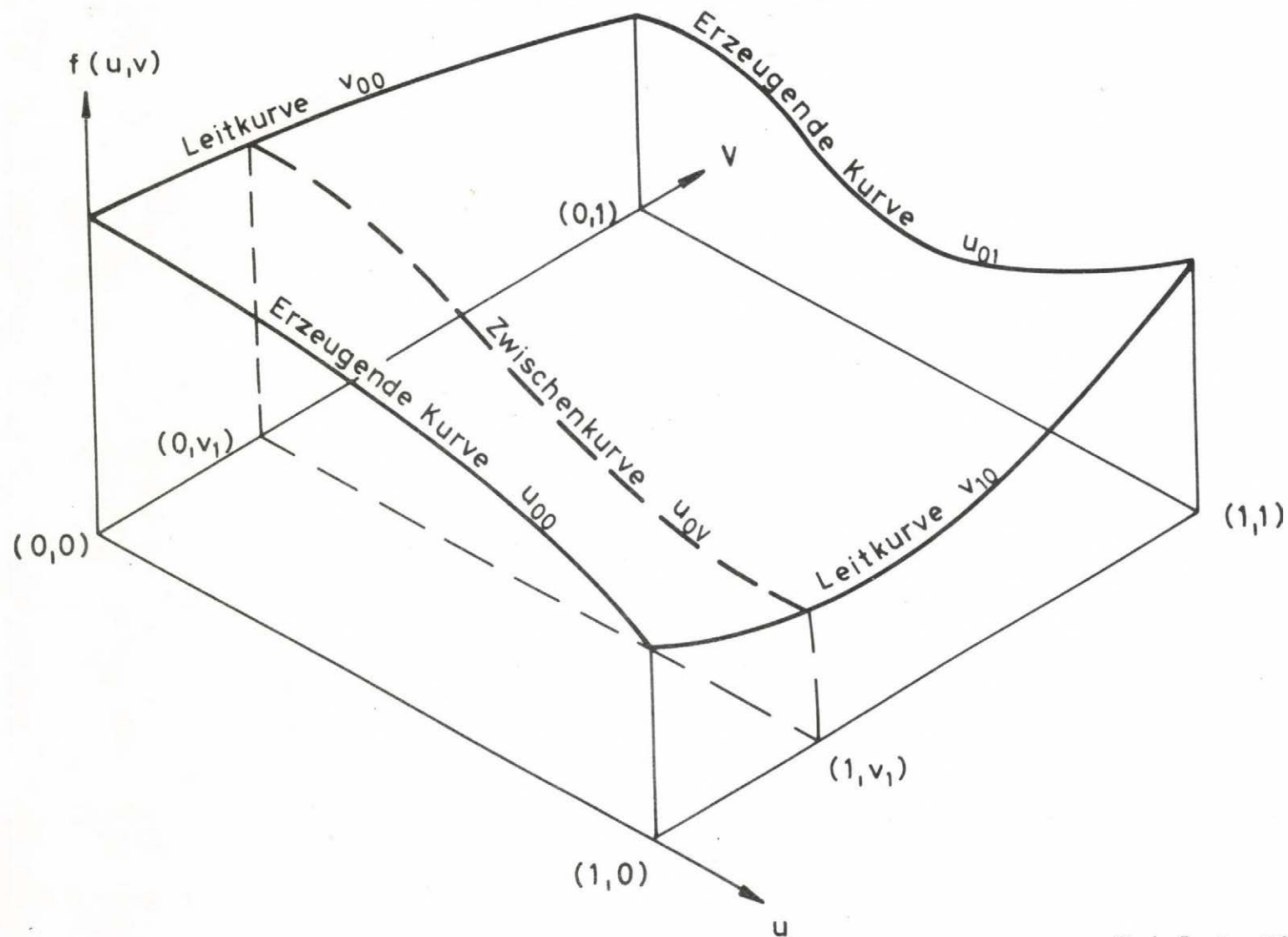
Bild 27

Zwei vorgegebene Stützkurven

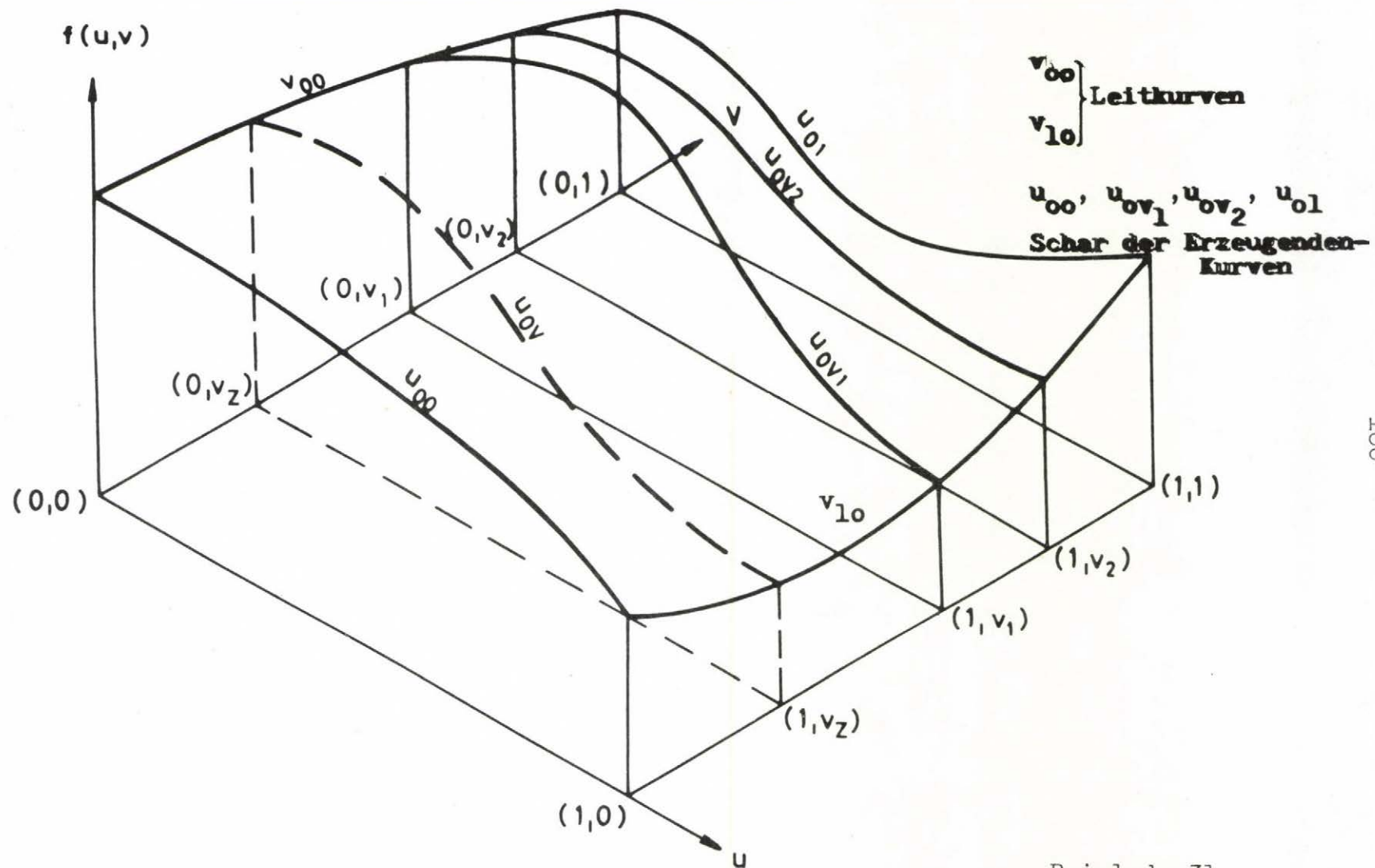


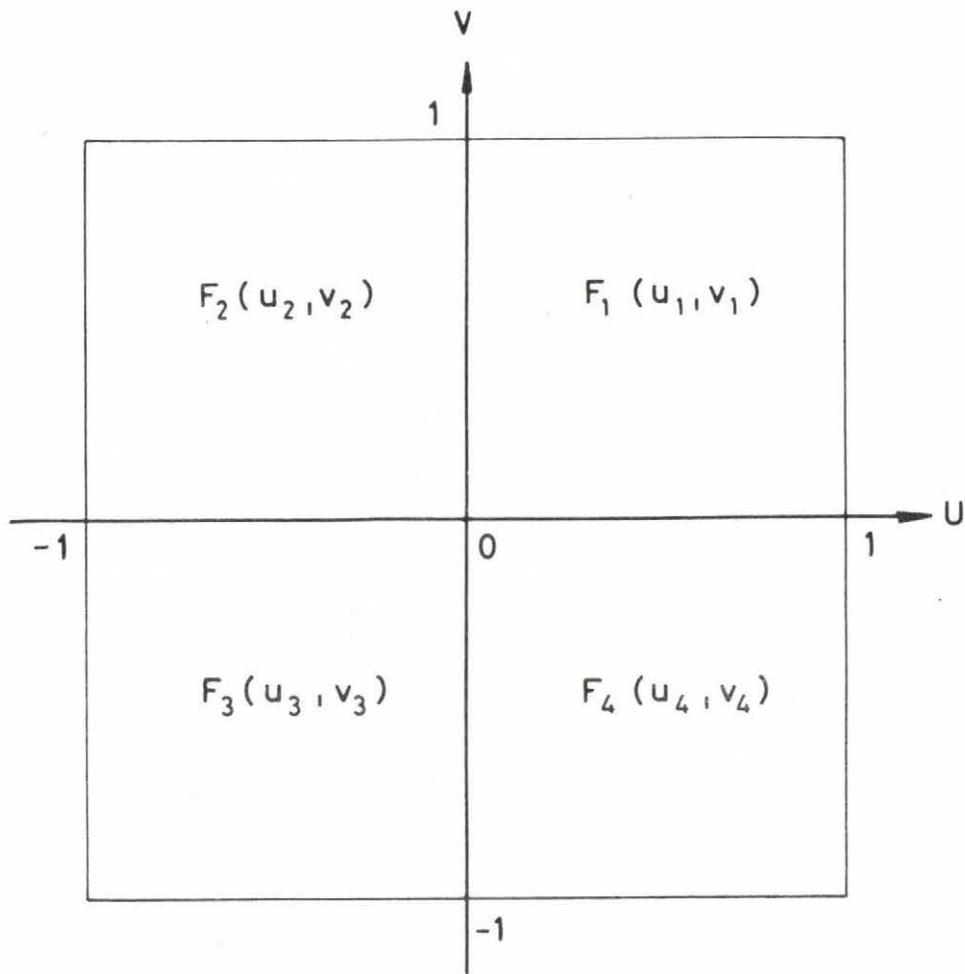
Erzeugende- und Leit-
kurve können vertauscht
werden.

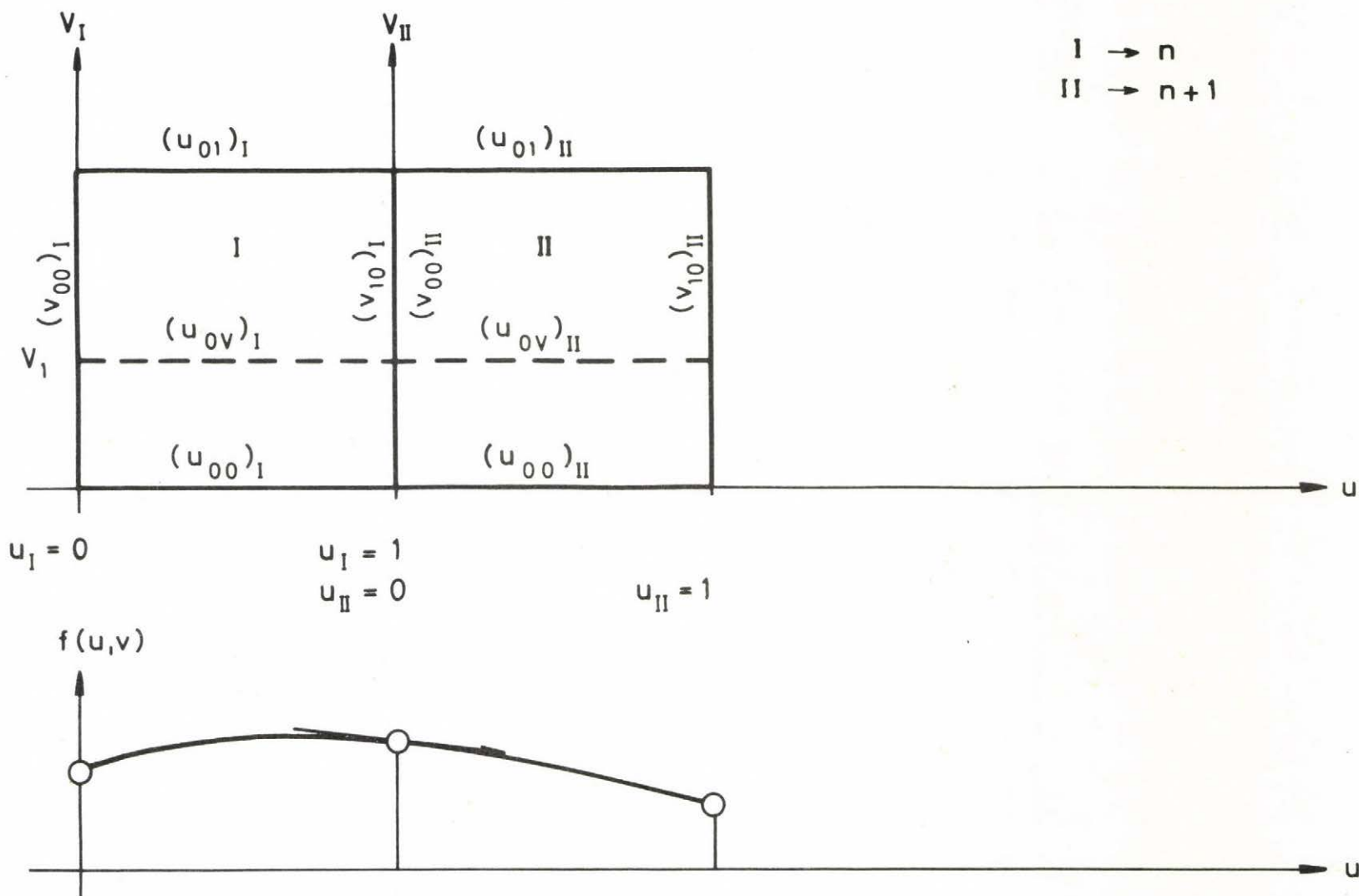
Vier vorgegebene Stützkurven



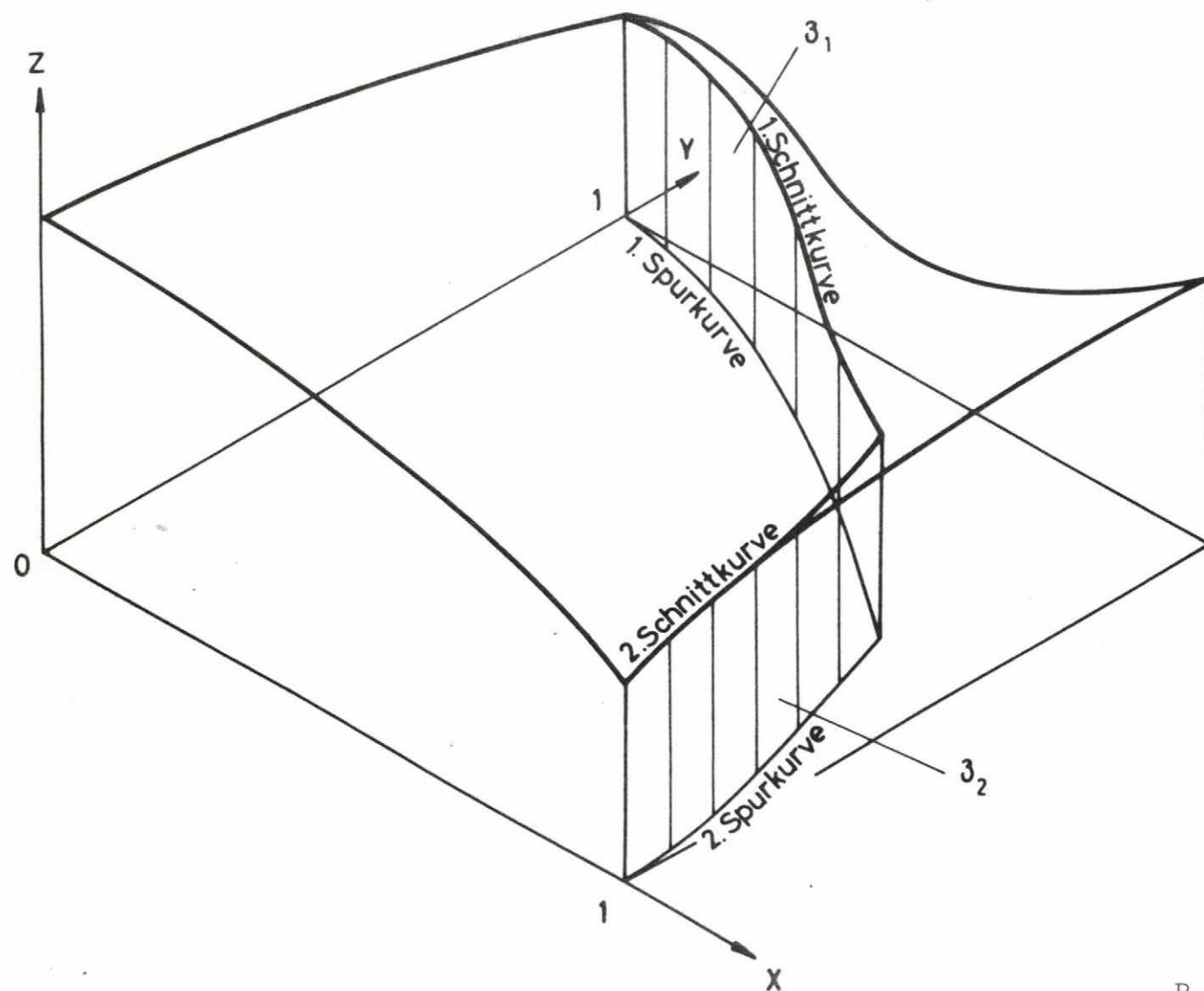
Mehr als vier vorgegebene Stützkurven

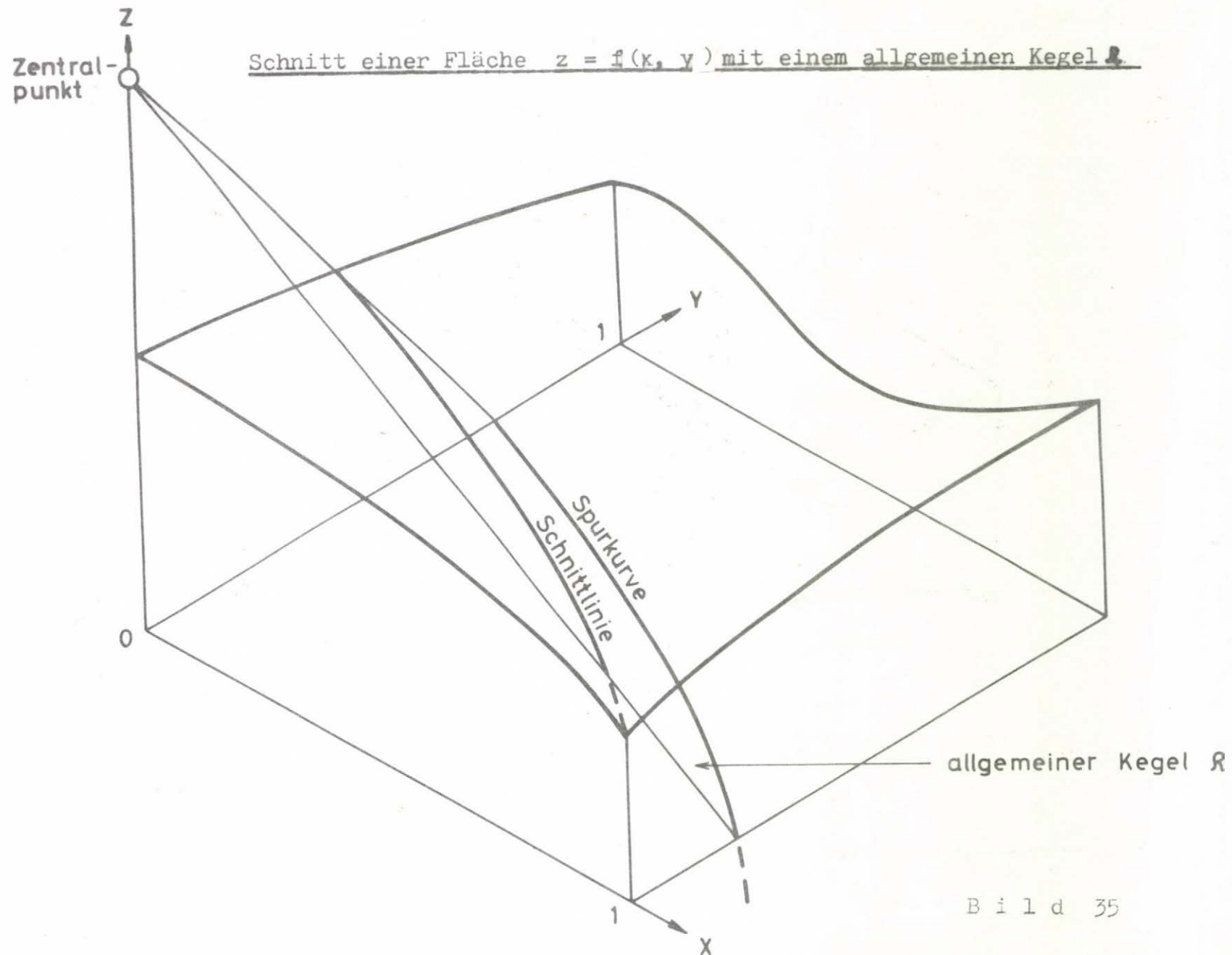




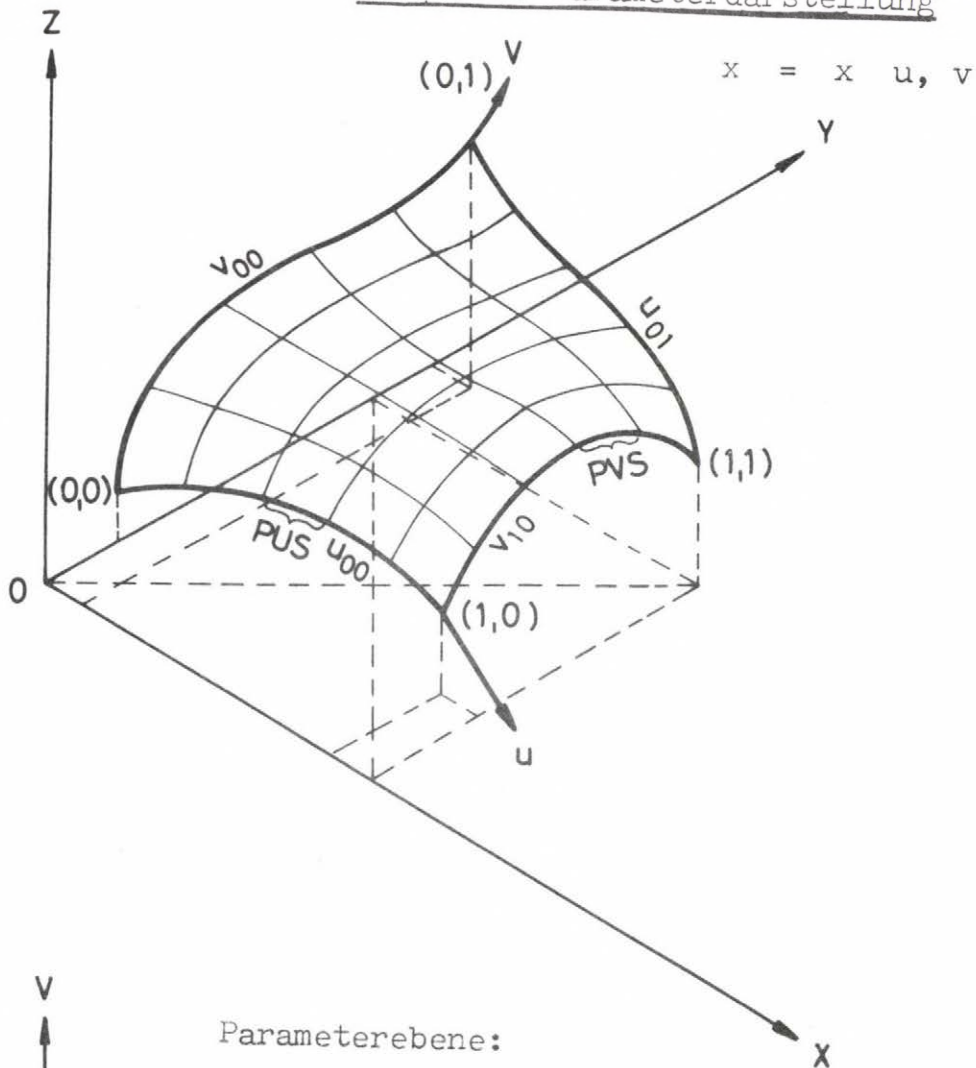


Schnitt einer Fläche $z = f(x, y)$ mit zwei allgemeinen Zylindern \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2

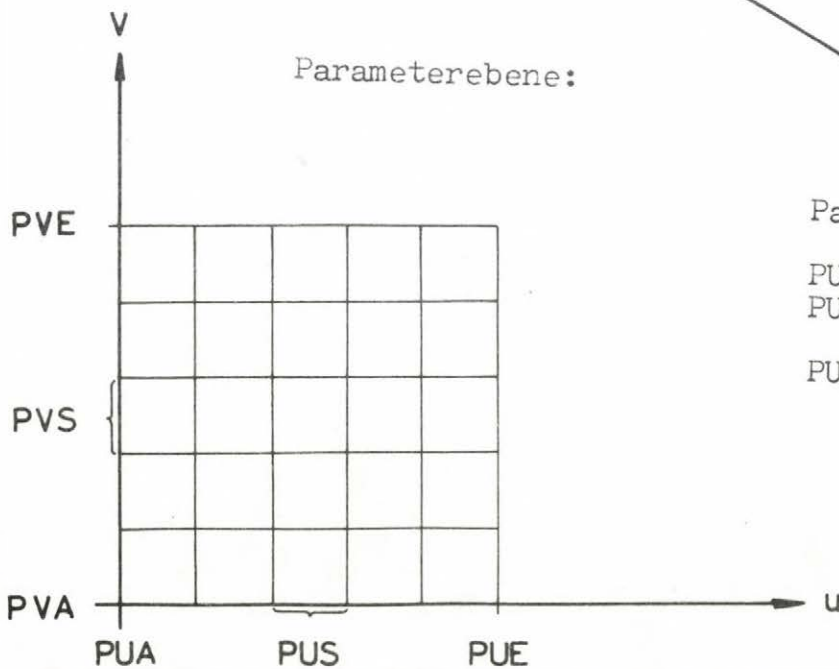




GAUSSsche Parameterdarstellung

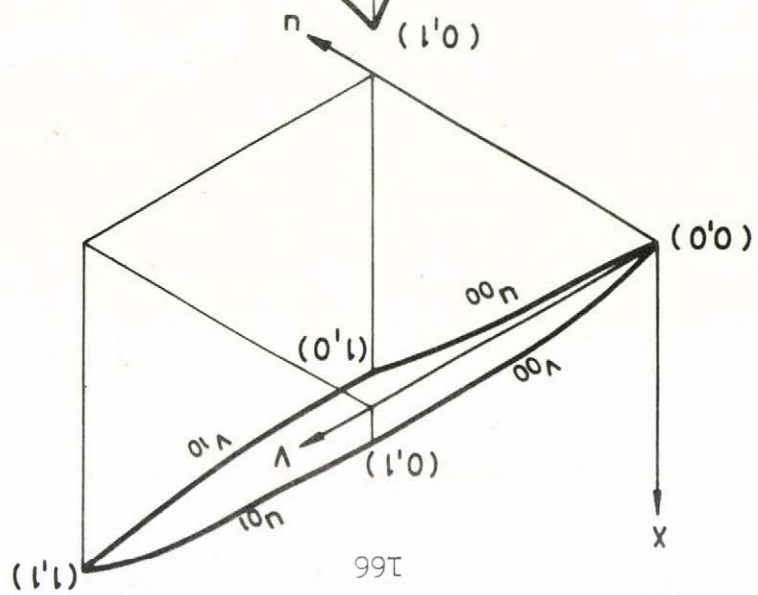
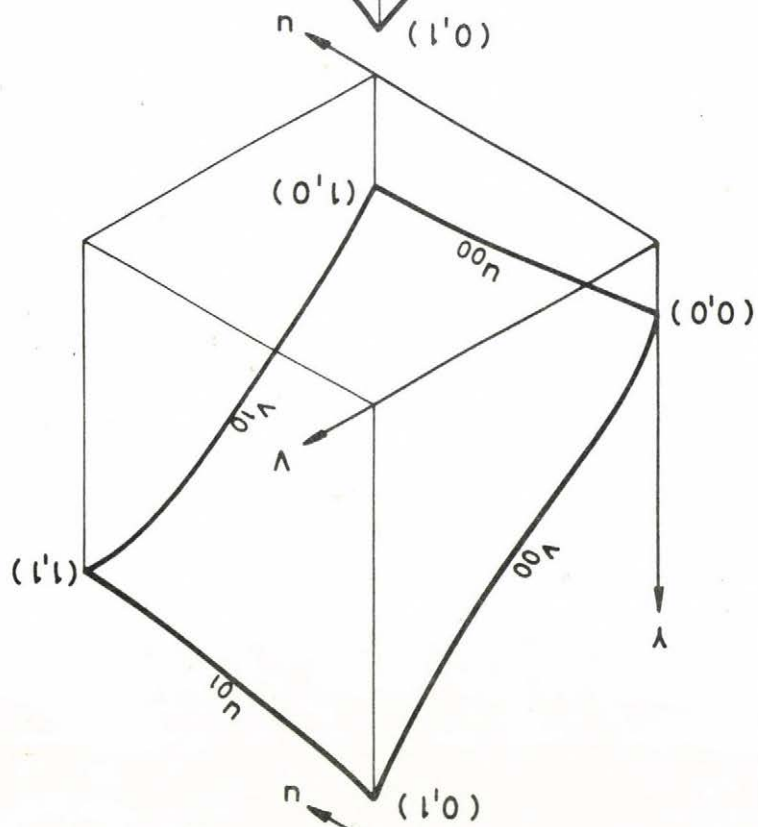
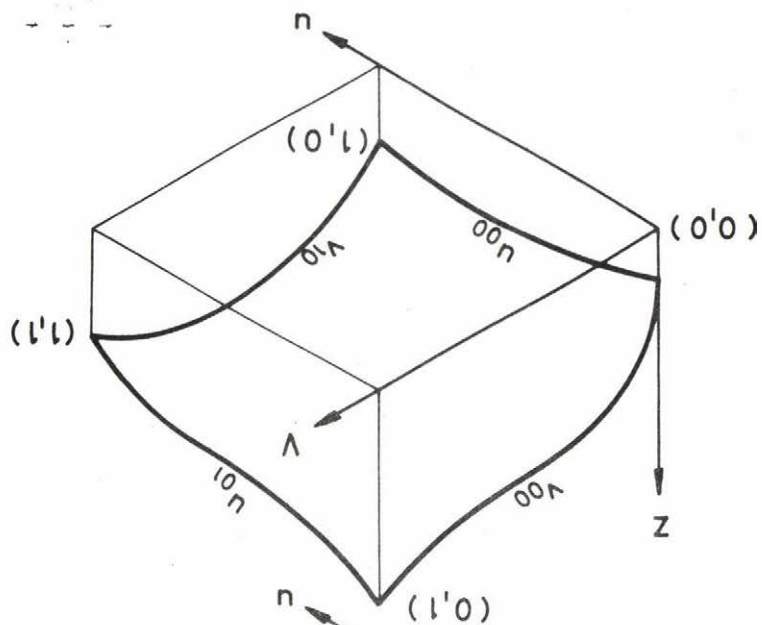


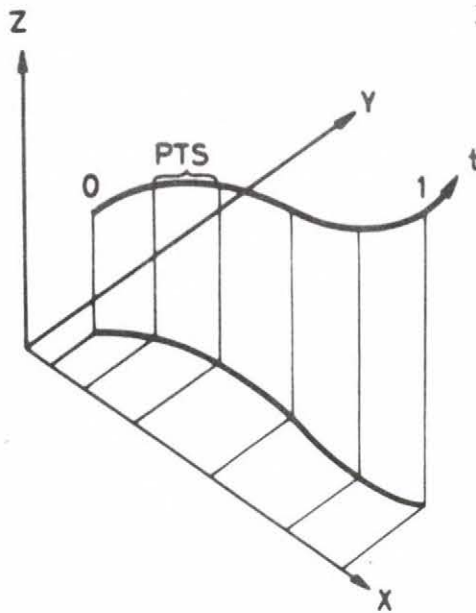
Parameterebene:



Parameteraufbereiche:

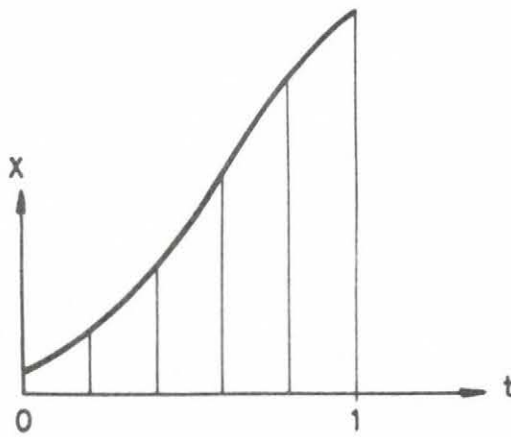
$$\begin{aligned} PUA &= PVA = 0 \\ PUS &= PVS = \text{Schritt-} \\ &\quad \text{weite} \\ PUE &= PVE = 1 \end{aligned}$$





Parameterdarstellung
einer Raumkurve

$$x = x \ t$$

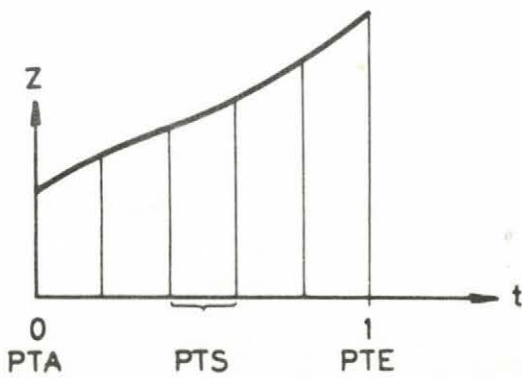
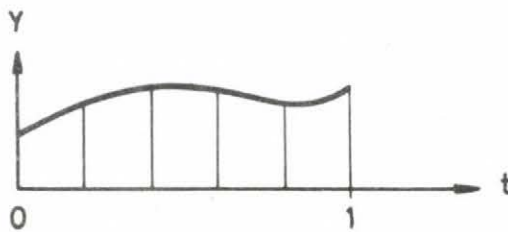


Parameterlaufbereich:

$$PTA = 0$$

$$PTS = \text{Schrittweite}$$

$$PTE = 1$$



Bewertung von Punktanordnungen nebst Vorgaben bei
Stützpunktverfahren

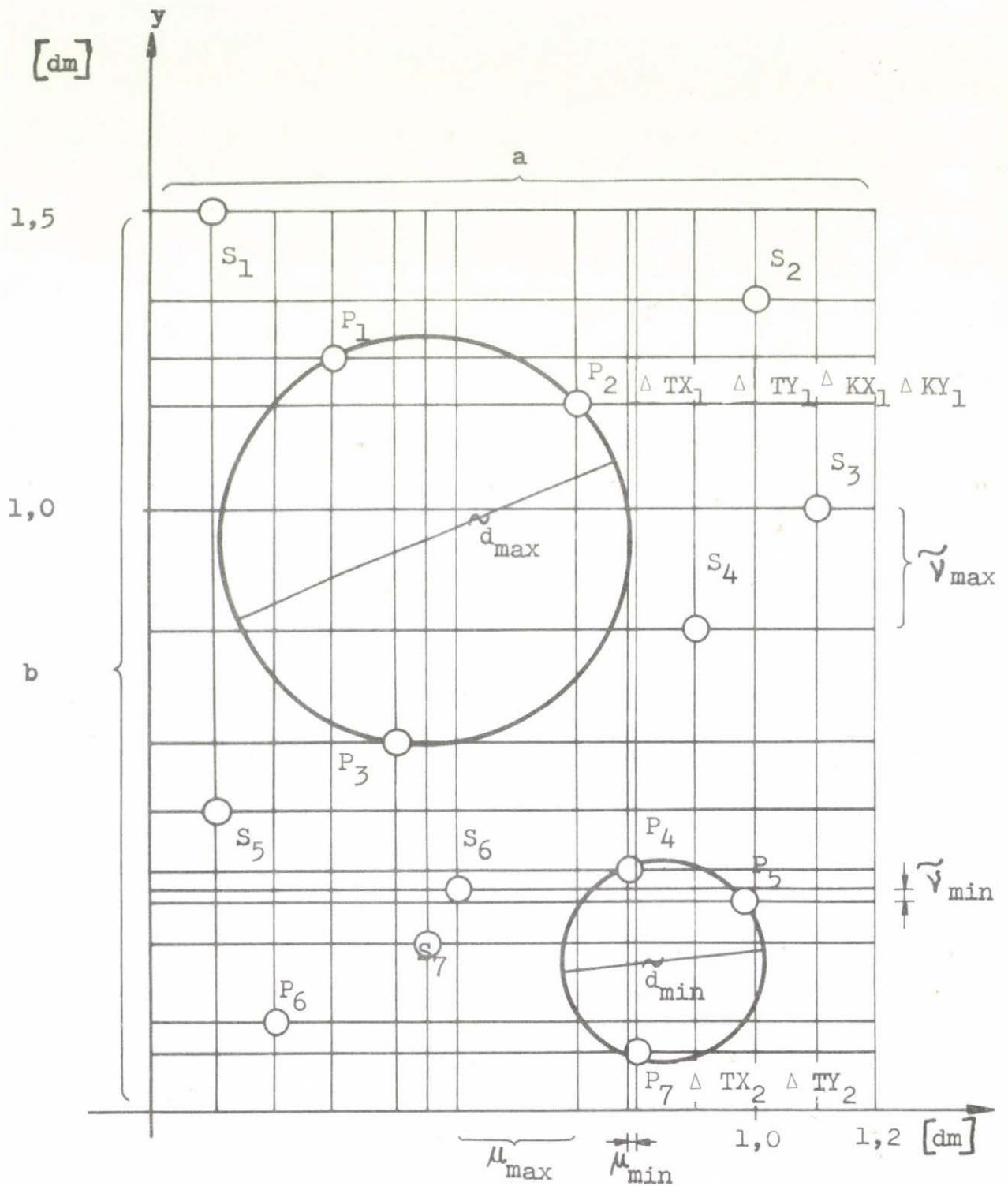


Bild 39

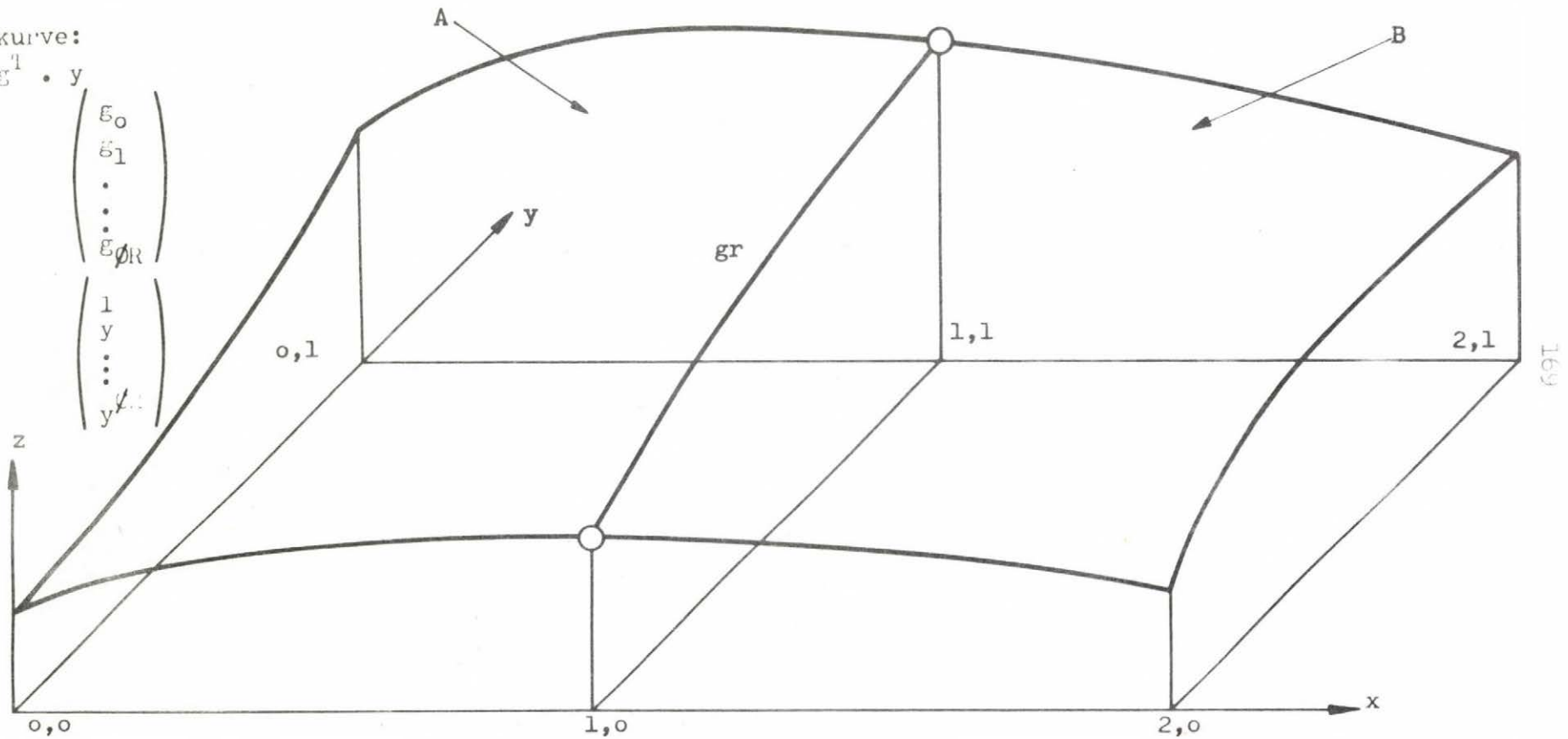
Zusammenschluss zweier Nachbarflächenstücke

Grenzkurve:

$$gr = g^1 \cdot y$$

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_R \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^R \end{pmatrix}$$



Bemerkung: Die Bilder 40 bis 43
korrespondieren nur qualitativ
miteinander!

Zusammenschluss zweier FLÄCHENSEGMENTE

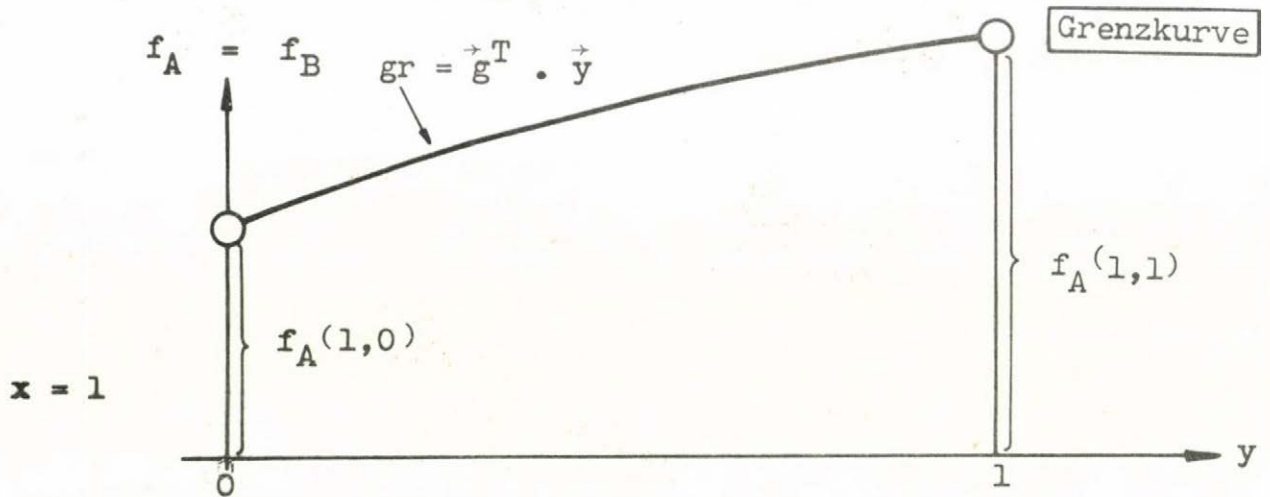


Bild 41

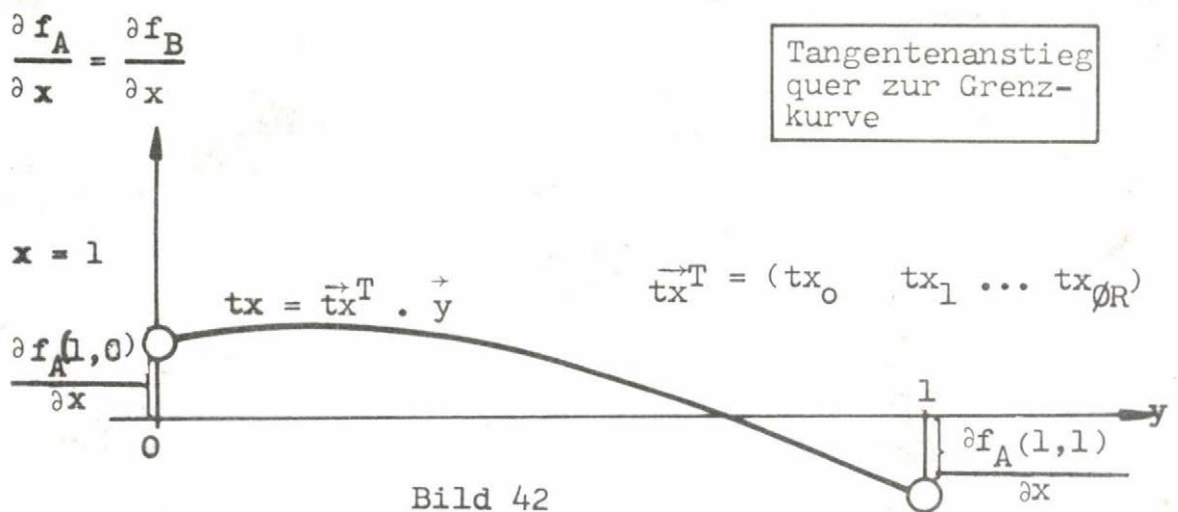


Bild 42

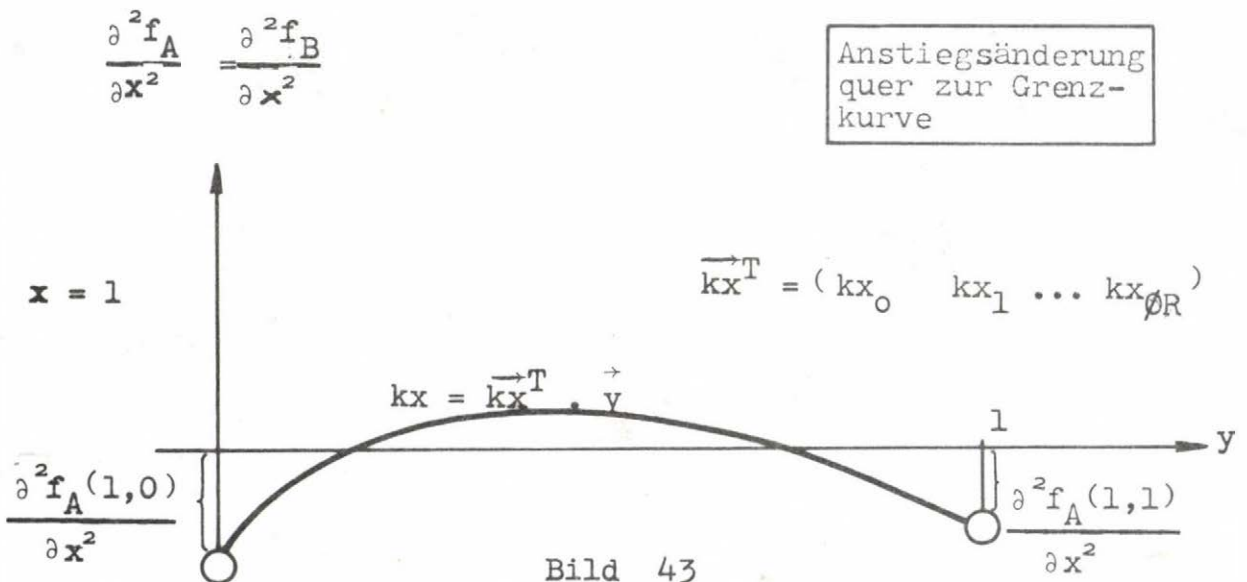
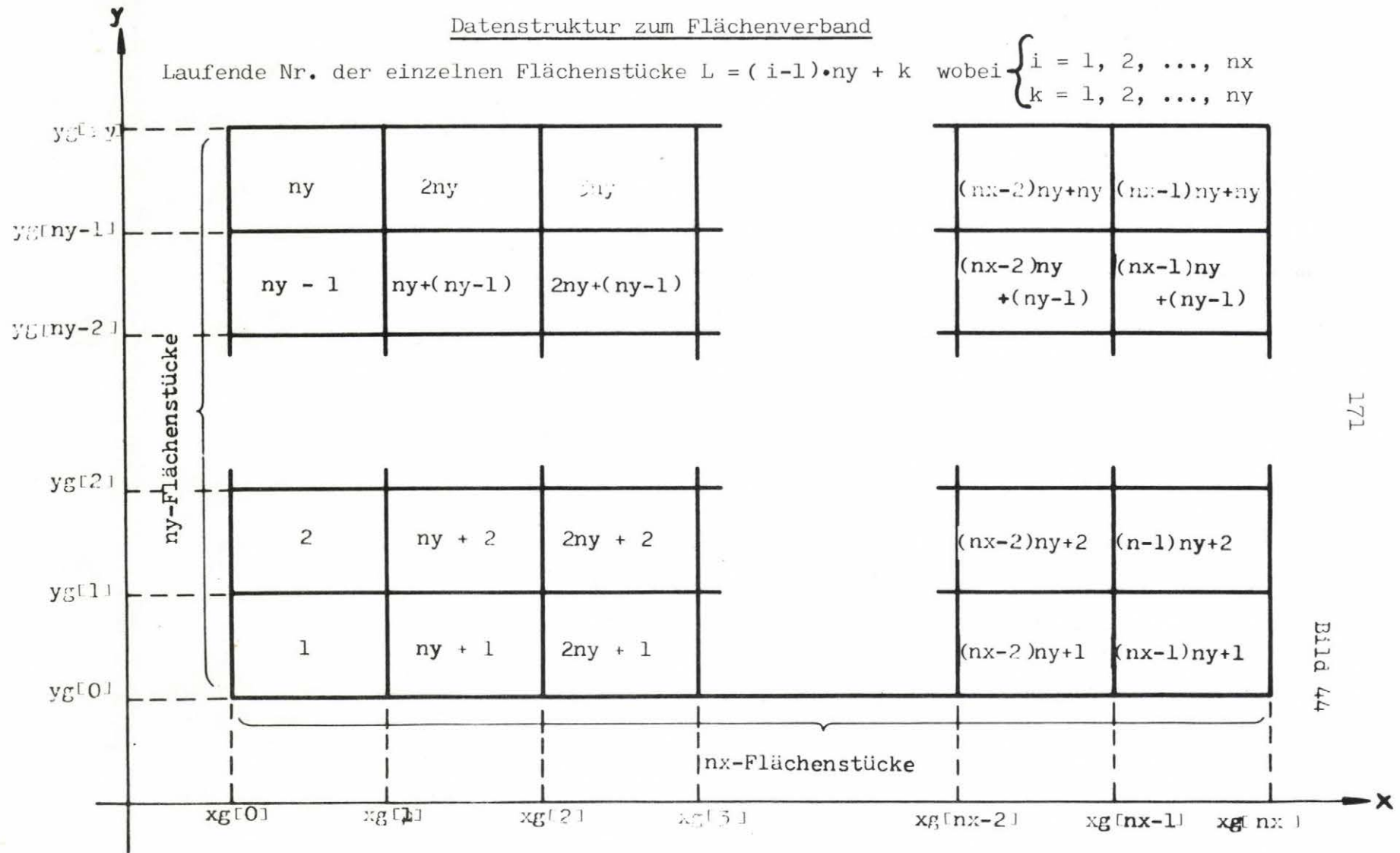


Bild 43

Datenstruktur zum Flächenverband

Laufende Nr. der einzelnen Flächenstücke $L = (i-1) \cdot ny + k$ wobei $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, nx \\ k = 1, 2, \dots, ny \end{cases}$



Zur Superposition von Flächen

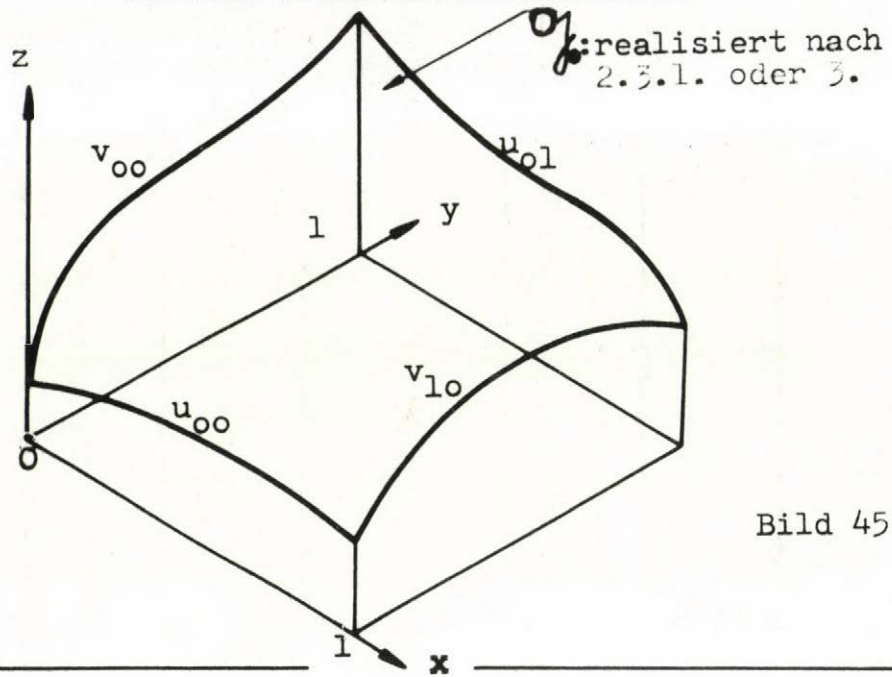


Bild 45

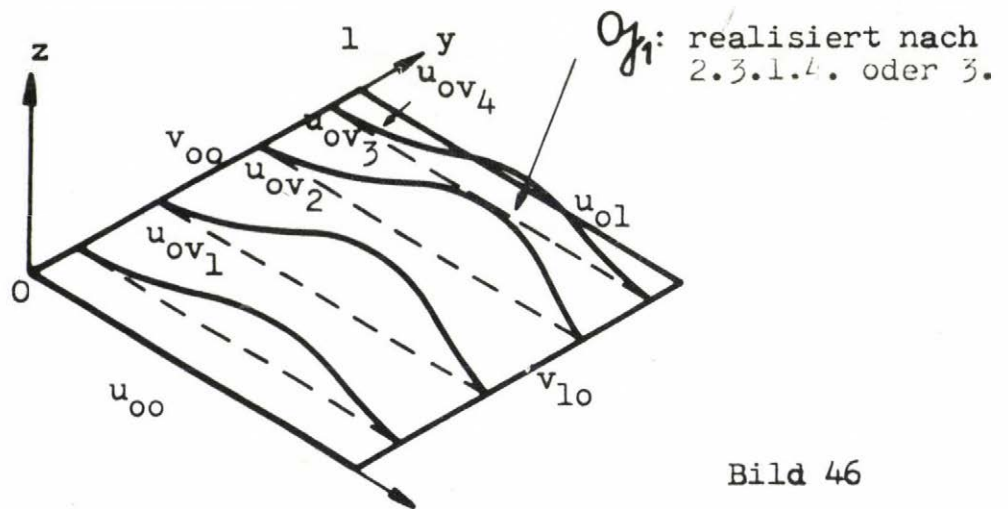


Bild 46

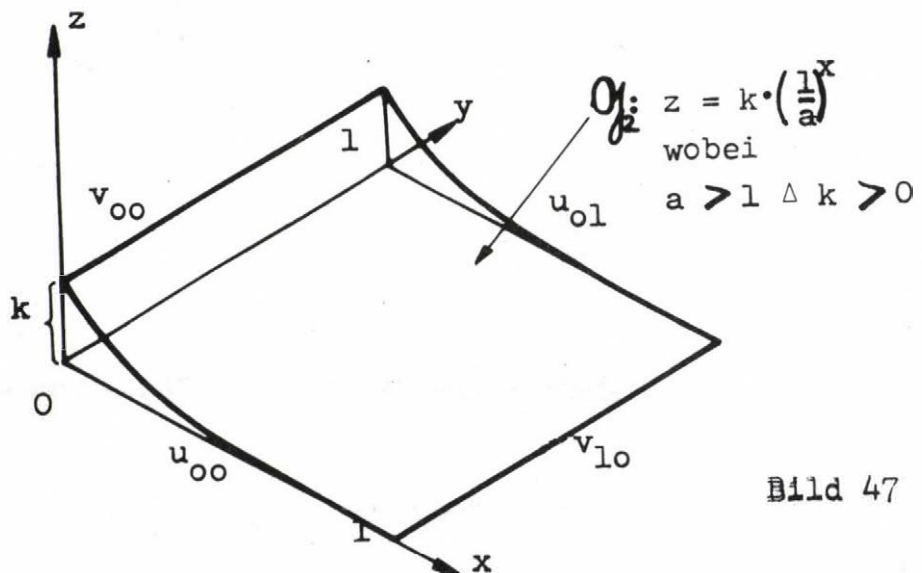


Bild 47

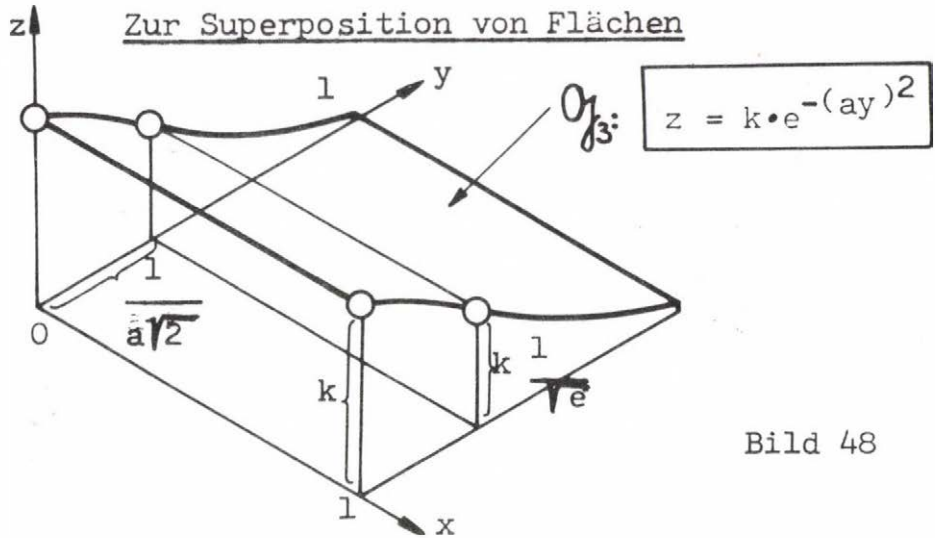
Zur Superposition von Flächen

Bild 48

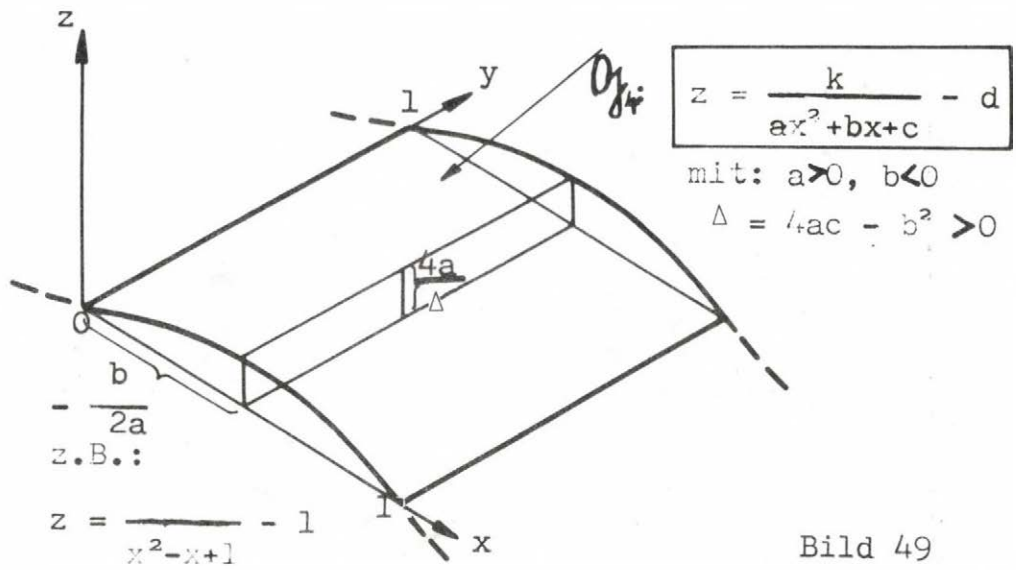


Bild 49

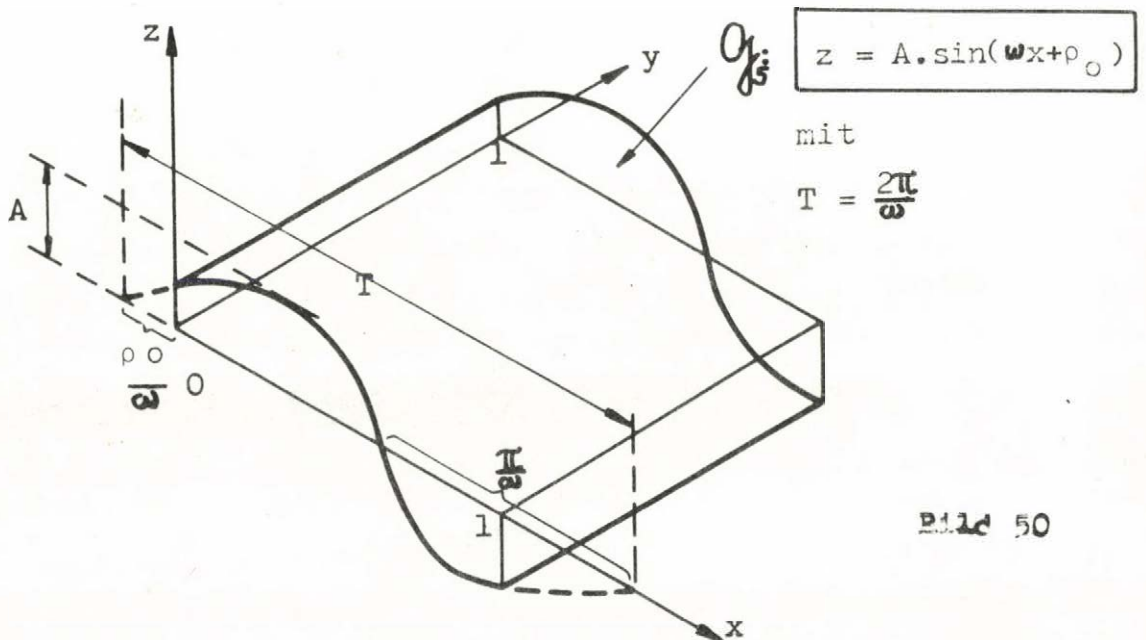
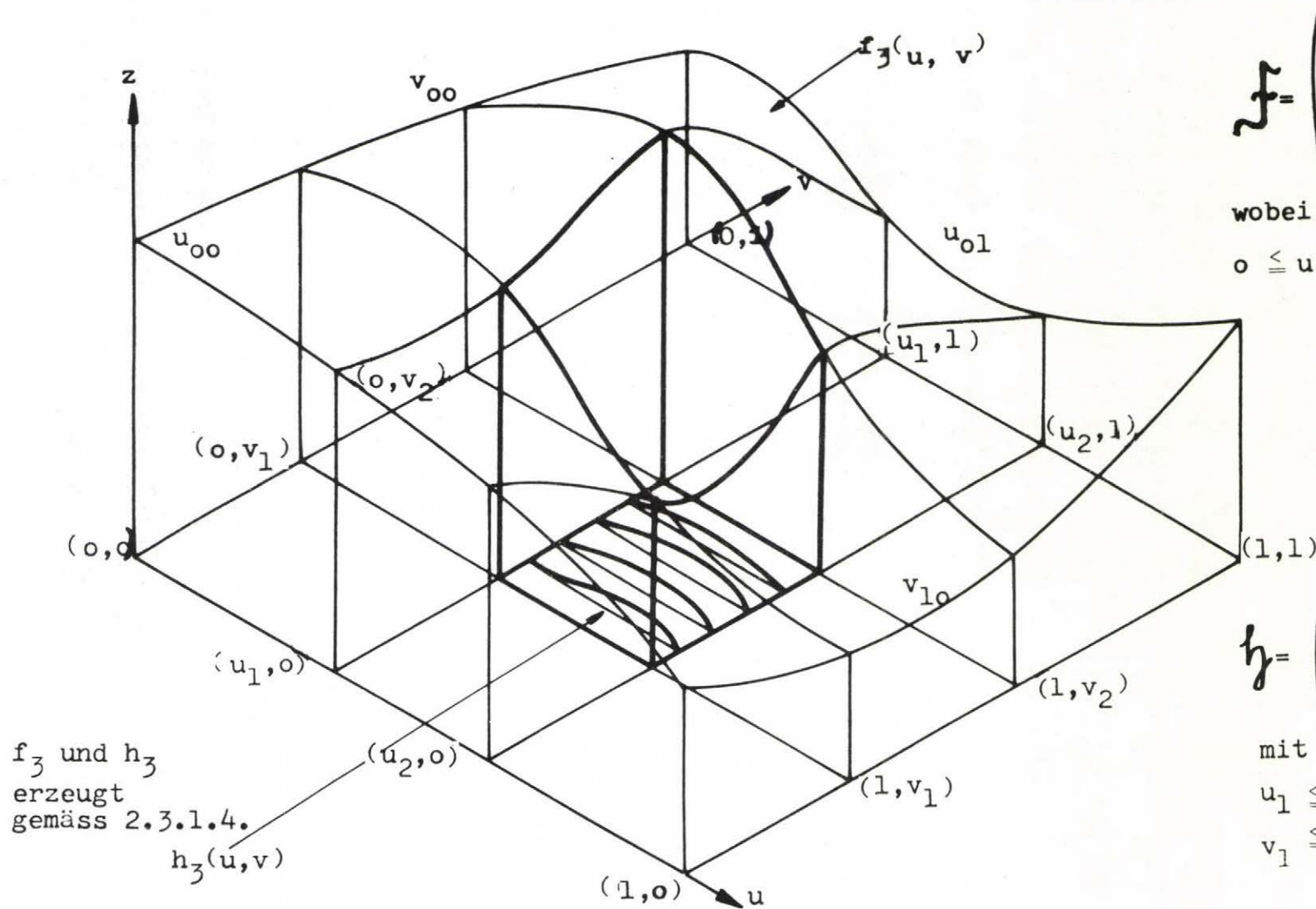


Bild 50

Zur Superposition von Flächen



$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \\ f_3(u, v) \end{pmatrix}$$

wobei

$$0 \leq u, v \leq 1$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1(u, v) \\ h_2(u, v) \\ h_3(u, v) \end{pmatrix}$$

mit

$$u_1 \leq u \leq u_2$$

$$v_1 \leq v \leq v_2$$

Zur Superposition von Flächen

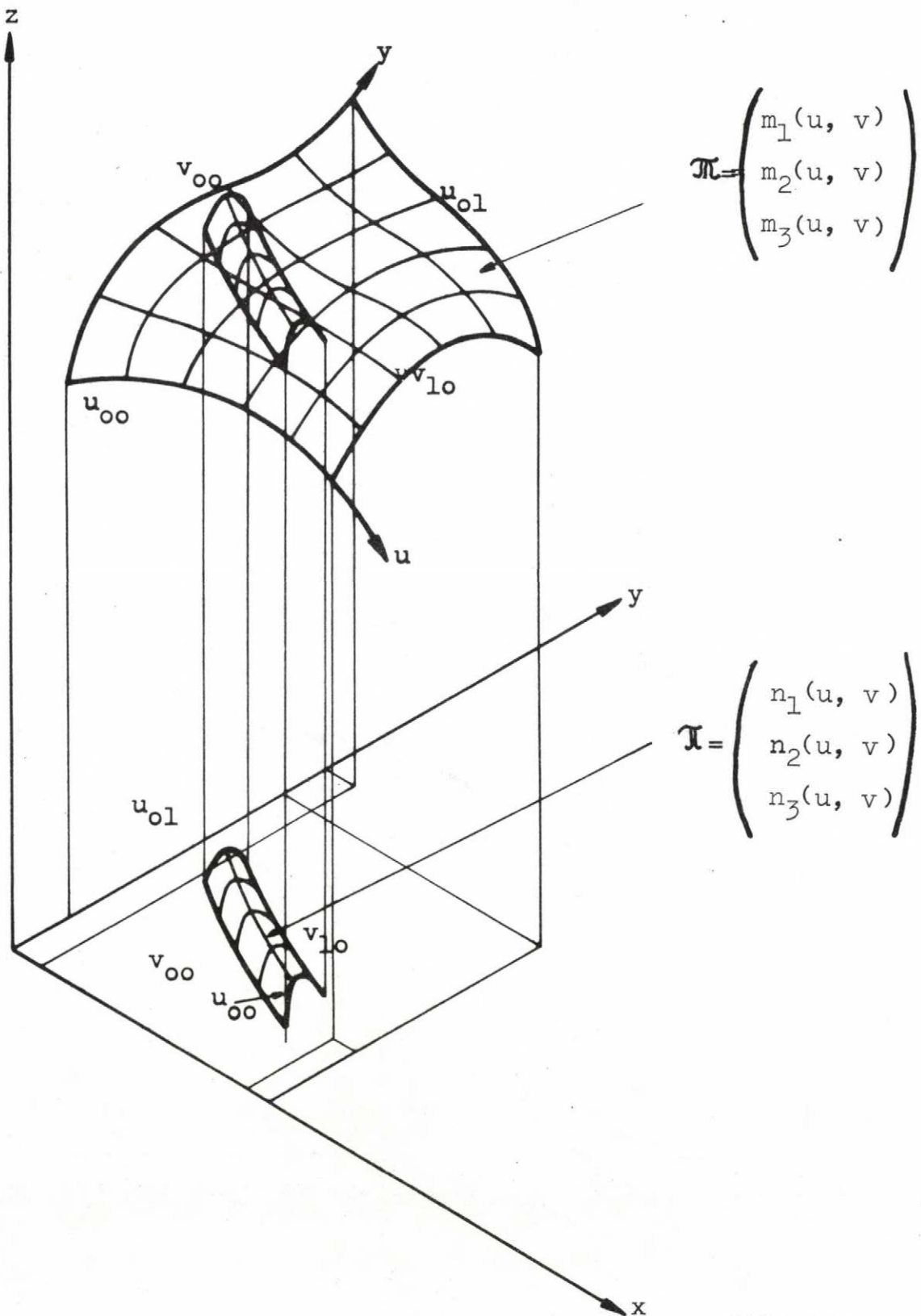


Bild 52

Kreissschablon 1

